Gustavo Villalobos Hernández

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS MATEMÁTICO

Guadalajara
2004

En matemática, por lo general, para simplificar la escritura se utilizan símbolos matemáticos y lógicos especiales en lugar de algunas expresiones:

Símbolo	se lee	ejemplo	
$\forall$	"para todo", "para cualquier"	$\forall\, a \in A$	"para toda a que está en A".
$\exists$	"existe", "al menos uno"	$\exists\, a \in A$	"existe alguna a que está en A".
$\exists!$	"existe uno, y sólo uno"	$\exists!\, a \in A$	"existe una, y sólo una a que está en A"
$\Longrightarrow$	"si…, entonces…", "implica"	$a \in A \Longrightarrow a \in B$	"si $a \in A$, entonces $a \in B$".
$\Longleftrightarrow$	"si, y sólo si", "equivale a"	$a \in A \Longleftrightarrow a \in B$	"$a \in A$ si, y sólo si $a \in B$".
$\therefore$	"por lo tanto", "entonces"	$\therefore\, a \in A$	"por lo tanto $a \in A$".
$\because$	"porque", "puesto que", "ya que"	$a \in A \because a \in B$	"$a \in A$ porque $a \in B$".
$\mid$	"tal que", "que", "la cual"	$\exists\, a \in A \mid a \in B$	"existe una $a \in A$ tal que $a \notin B$"
$:=$	"es igual, por definición, a"	$\mathbf{p} := (a, b)$	"$\mathbf{p}$ es igual, por definición a (a, b)"
$=:$	"se denota por ", "se simboliza por"	$(a, b) =: \mathbf{p}$	"(a, b) se denota como $\mathbf{p}$"
$\wedge$	"y" (conjunción)	$a \in A \wedge a \in B$	"$a \in A$ y $a \in B$"
$\vee$	"ó" (disyunción)	$a \in A \vee a \in B$	"$a \in A$ ó $a \in B$"
$\underline{\vee}$	"ó…ó" (disyunción excluyente)	$a \in A \,\underline{\vee}\, a \in B$	"ó $a \in A$ ó $a \in B$, pero no a ambos".
$\neg$	"no" (negación)	$\neg\mathbf{P}(a)$	"La proposición $\mathbf{P}$ no es verdadera para a"

En muchas ocasiones, en la matemática, la negación de una proposición se denota tachando el símbolo que la define, con una línea inclinada. Por ejemplo: se escribe $a \notin A$ en lugar de $\neg(a \in A)$.

ÍNDICE

PRÓLOGO

Como análisis matemático se entiende, antes que nada, cálculo diferencial e integral. La creación de los fundamentos del cálculo diferencial e integral por Newton y Leibnitz fue uno de los más grandes acontecimientos científicos del siglo XVII, aunque algunos conceptos fundamentales análogos hayan sido formulados mucho antes. Actualmente el análisis, en toda la extensión de la palabra, ha constituido, junto con el álgebra y la geometría, uno de los pilares fundamentales sobre los cuales se asienta todo el árbol de la matemática moderna. Por eso, se ha convertido en una de las disciplinas indispensables para el mundo matemático, lo cual es demostrado por la gran cantidad de libros editados sobre el tema. Sin embargo, no se puede concluir de esto, que en el análisis no hayan quedado temas para la investigación científica y para grandes descubrimientos. En verdad, lo que sucede es que el análisis matemático ha crecido tanto, que se ha visto la necesidad de estudiar algunas de sus ramas por separado, como son por ejemplo, la teoría de probabilidad y la estadística matemática, la teoría de funciones de variable compleja y el análisis funcional, la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, las ecuaciones de la física matemática,… etc. En un sentido más estrecho de la palabra, como una materia de estudio, representa por sí mismo una parte, y quizá una de las mayores, que se presentan como generales para todas las disciplinas de la matemática moderna, de aquí el papel fundamental que juega en la formación matemática.

El presente trabajo contiene sólo la primera parte de la obra completa, que está dirigida, en primer lugar, a estudiantes que desean iniciarse en el curso, con el estudio y las demostraciones de los teoremas fundamentales, que les permitan adquirir las bases para su formación en el área de la matemática, con un enfoque diferente al acostumbrado. Evidentemente, también los demás interesados en el tema están invitados al estudio de la presente obra, sin embargo, se requiere que el lector tenga bien fundamentadas las bases de la educación media superior, necesarias para la buena comprensión del tema.

INTRODUCCIÓN

El presente libro ha sido pensado como libro de texto para la Licenciatura en la materia de Lógica y Conjuntos, abarcando la parte de Teoría de Conjuntos. En el libro se dedica la mayor parte al estudio de la Teoría de Conjuntos como una introducción al tema. Los primeros cinco capítulos están dedicados a la parte básica: Algunos Conceptos Elementales, a la Axiomática, en forma breve, Relaciones Binarias, Mapeos y Operaciones Binarias; y a los Conjuntos Ordenados; y los otros tres, a temas más avanzados: Cardinalidad, Números Ordinales, Axioma de Elección, Hipótesis del Continuo, que también son necesarios para una formación matemática básica. Finalmente, en el primer apéndice, se ve una introducción a la Teoría de Límites, con un enfoque no acostumbrado, pero que resulta de gran interés. En el segundo apéndice se da un método general de obtención de criterios de divisibilidad y, por último, se establece una extensión de la regla de Sarrus, que permite calcular determinantes de matrices cuadradas de orden mayor que tres.

CAPÍTULO I
ALGUNOS CONCEPTOS SOBRE TEORÍA DE CONJUNTOS

§ 1.1 CONJUNTOS. CONCEPTOS ELEMENTALES Y NOTACIÓN.

El lenguaje de la teoría de conjuntos ha sido, desde los últimos años del siglo XIX y los primeros del siglo XX, el lenguaje más universal de la matemática. El matemático alemán George Cantor (1845−1918) es reconocido como el fundador de dicha teoría.

Conjunto. Llamamos *conjunto* a cualquier colección de objetos bien definidos, de cualquier naturaleza.

Para denotar los diferentes conjuntos se utilizan las letras mayúsculas del alfabeto latino

$$\ldots A, B, C, \ldots, X, Y, Z, \ldots$$

Elemento. Los objetos que en su totalidad forman un conjunto dado, se llaman *elementos* del conjunto.

Para denotar los diferentes elementos se utilizan las letras minúsculas del alfabeto latino

$$\ldots a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots$$

Notación por extensión. El conjunto formado por los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ generalmente escribe encerrando los elementos entre llaves {} y separándolos por comas de la siguiente manera: $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Esta forma de denotar un conjunto se llama por extensión ó por enumeración. Cuando no haya lugar a confusiones, escribiremos a en lugar de $\{a\}$.

Es importante tener en cuenta los siguientes puntos:

1) un conjunto queda definido unívocamente por los elementos que lo forman;
2) cualquier propiedad define un conjunto de objetos, los cuales satisfacen dicha propiedad.

Notación por descripción. Si a es un objeto y $\mathbf{P}$ es una propiedad, entonces $\mathbf{P}(a)$ denota que a tiene la propiedad $\mathbf{P}$ y mediante $\{x \mid \mathbf{P}(x)\}$ se denota toda la clase de objetos que tienen la propiedad $\mathbf{P}$.

El símbolo "|", se lee "tal que", por lo que la expresión "$x \mid \mathbf{P}(x)$" se puede leer como
"x tal que x tiene la propiedad $\mathbf{P}(x)$", ó bien
"x tal que x cumple la propiedad $\mathbf{P}(x)$"

Relación de pertenencia. Si un objeto a es un elemento del conjunto A, se escribe

$$a \in A \quad (\text{ó } A \ni a)$$

Por el contrario, si un objeto a no es un elemento del conjunto A, escribimos

$$a \notin A \quad (\text{ó } A \not\ni a)$$

Ejemplos de conjuntos:
a) el conjunto de los estudiantes de un grupo.
b) el conjunto de todos los números pares.
c) el conjunto de todos los triángulos sobre el plano.

Definición 1.1. (*Principio de Extensión*). Dos conjuntos A y B *son iguales* si, y sólo si, ambos tienen los mismos elementos, lo que se escribe

$$A = B \qquad (\text{ó } B = A)$$

que se lee "el conjunto A es igual al conjunto B", ó simplemente, "A es igual B".

$A = B$ significa que $x \in A$ implica $x \in B$ y que $x \in B$ implica $x \in A$.

Por el contrario, si dos conjuntos A y B no son iguales, escribimos

$$A \neq B \qquad (\text{ó } B \neq A)$$

De esta manera $A \neq B$ significa que A tiene algún elemento que no tiene B ó que B tiene algún elemento que no tiene A.

Definición 2.1. Si todo elemento de un conjunto A es también un elemento de un conjunto B, entonces se dice que A es un *subconjunto* (o una *parte*) del conjunto B, lo que se escribe

$$A \subseteq B \qquad (\text{ó } B \supseteq A)$$

Por el contrario, si el conjunto A contiene algún elemento que no está contenido en el conjunto B, se dice que A no es un subconjunto del conjunto B, y se escribe

$$A \nsubseteq B \qquad (\text{ó } B \nsupseteq A)$$

Nótese que $A = B$ si y sólo si, $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, es decir, $A = B \Longleftrightarrow (A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A)$

Subconjunto Propio. Si $A \subseteq B$ pero $A \neq B$, se dice que A es un *subconjunto propio* de B, lo que se escribe como

$$A \subset B \qquad (\text{ó } B \supset A)$$

Por el contrario, si un objeto A no es un subconjunto propio del conjunto B, escribimos

$$A \not\subset B \qquad (\text{ó } B \not\supset A)$$

Diagramas de Venn - Euler. Para ilustrar de manera instructiva y sencilla las relaciones entre conjuntos, se utilizan los llamados Diagramas de Venn – Euler, conocidos simplemente como Diagramas de Venn, que representan un conjunto como el área de una figura geométrica, frecuentemente delimitada por un círculo.

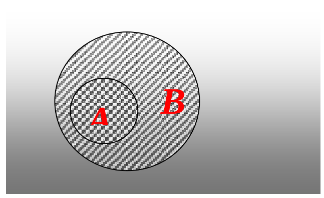


fig. 1 $A \subset B$

Definición 3.1. Dos conjuntos A y B son *comparables* si A es un subconjunto de B ó B es un subconjunto de A, es decir, si $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$, en caso contrario, es decir, si $A \nsubseteq B$ y $B \nsubseteq A$, entonces A y B son no comparables.

§ 2.1 SIMBOLOGÍA

Para simplificar la escritura, se utilizarán también los símbolos matemáticos y lógicos siguientes:

1) El símbolo "$\neg$", es llamado negación, y la expresión "$\neg(x \in A)$" se puede leer como

"a *no pertenece* al conjunto A", ó bien "a *no es un elemento* de A"

Sin embargo, en la matemática, la negación de una proposición se denota tachando el símbolo que la define, con una línea inclinada. Así, por ejemplo, se escribe $a \notin A$ en lugar de $\neg(a \in A)$; $A \not\subseteq B$ en lugar de $\neg(A \subseteq B)$; $A \neq B$ en lugar de $\neg\,(A = B)$, …etc.

2) El símbolo "$\Longrightarrow$," es llamado *implicación*, y la expresión "$x \in A \Longrightarrow x \in B$" se puede leer como

"*si* $a \in A$, *entonces* $a \in B$", ó bien "$a \in A$ *implica* $a \in B$"

Por ejemplo: la inclusión $A \subseteq B$ significa que $x \in A \Longrightarrow a \in B$.

3) El símbolo "$\Longleftrightarrow$", es llamado *doble implicación* ó símbolo de *equivalencia*, y la expresión "$x \in A \Longleftrightarrow x \in B$" se puede leer como

"$a \in A$ *si, y sólo si* $a \in B$", ó bien "$a \in A$ es *equivalente* a $a \in B$"

Por ejemplo: la igualdad $A = B$ significa que $x \in A \Longleftrightarrow x \in B$.

4) El símbolo "$=:$", es llamado símbolo de *notación* ó de *asignación*, y la expresión "$(x \in A \Longrightarrow a \in B) =: A \subseteq B$" se puede leer como

"si $x \in A$ implica $x \in B$", entonces esto "*se denota*" como $A \subseteq B$.

5) El símbolo "$:=$", es llamado símbolo de *igualdad por definición*, y la expresión "$A = B := (x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$" se puede leer como

"A y B *por definición* son iguales si, $x \in A$ implica $x \in B$ y $x \in B$ implica $x \in A$".

6) El símbolo "$\wedge$", es llamado *conjunción*, y la expresión $x \in A \wedge x \in B$ se puede leer como

"$a \in A$ *y* $a \in B$"

7) El símbolo "$\vee$", es llamado *disyunción*, y la expresión $x \in A \vee x \in B$ se puede leer como

"$a \in A$ *o* $a \in B$"

8) El símbolo "$\underline{\vee}$", es llamado *disyunción excluyente*, y la expresión $x \in A \,\underline{\vee}\, x \in B$ se puede leer como

"$a \in A$ *ó* $a \in B$, *pero no a ambos*"

También serán de mucha utilidad los símbolos cuantificadores $\forall$, $\exists$ y $\exists!$

9) El símbolo "$\forall$" es llamado *cuantificador universal*, y la expresión "$\forall\ x \in A$, $\mathbf{P}(x)$" se puede leer como

"*para toda* $x \in A$, se cumple la propiedad **P**", ó bien "*para cualquier* $x \in A$ cumple la propiedad **P**".

10) El símbolo "$\exists$" es llamado *cuantificador existencial*, y la expresión "$\exists\ x \in A \mid \neg\mathbf{P}(x)$" se puede leer como

"*existe alguna* $x \in A$ tal que x no cumple la propiedad **P**", ó bien
"*existe al menos una* $x \in A$ que no cumple la propiedad **P**", ó bien
"*existe por lo menos una* $x \in A$ para la cual la propiedad **P** no se cumple".

Como caso especial, el símbolo "$\exists!$" es llamado *cuantificador existencial con unicidad*, y la expresión "$\exists!\ x \in A,\ \mathbf{P}(x)$" se puede leer como

"*existe una, y sólo una* (o *existe una única*) $x \in A$ que tiene la propiedad **P**".

La negación de los cuantificadores tiene la siguiente forma:

$$\neg(\forall\ x \in A, \mathbf{P}(x)) \iff (\exists\ x \in A \mid \neg\mathbf{P}(x))$$
$$\neg(\exists\ x \in A \mid \mathbf{P}(x)) \iff (\forall\ x \in A, \neg\mathbf{P}(x))$$

6) El símbolo "$\therefore$" que se lee "*por lo tanto*", "*entonces*" "*se deduce de lo anterior*", que es parecido al símbolo $\Longrightarrow$. La diferencia entre ellos es que $\Longrightarrow$ es una deducción de la expresión escrita inmediatamente antes de él, en cambio $\therefore$ es una deducción de lo visto anteriormente. Por ejemplo: la expresión "$A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, $\therefore\ A = B$", se puede leer como

"puesto que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ y, *por lo tanto* $A = B$", ó bien
"como se demostró $A \subseteq B$ y que $B \subseteq A$, *entonces* $A = B$".

7) El símbolo "$\because$" que se lee "*porque*", "*puesto que*", "*ya que*", "*esto se justifica por..*", sirve para mencionar que el resultado obtenido, escrito inmediatamente antes de él; es justificado por lo que se escribe inmediatamente después de él, algunas de las veces dentro de paréntesis. Por ejemplo: la expresión "$A = B$ ($\because$ $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$)", se puede leer como

"$A = B$, *puesto que* $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$", ó bien "$A = B$, *ya que se demostró que* $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$"

Conjunto Universal. Siempre que se aplica la teoría de conjuntos, conviene estudiar solamente aquellos conjuntos que son subconjuntos de un conjunto U dado, llamado *conjunto universal* o *universo en discurso*. En este caso se dice que $A \subseteq U$ para cualquier conjunto A.

Conjunto Vacío. El *conjunto vacío* es un conjunto que carece de elementos. Se denota el conjunto vacío por $\varnothing$. Nótese que $\varnothing \subseteq A$ para cualquier conjunto A.

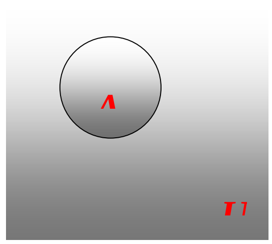


fig. 2 $\varnothing$ (lo rayado) U (lo demás)

Familia de Conjuntos o Sistema de Conjuntos. En lugar de conjunto de conjuntos, en matemática se utiliza el término *familia de conjuntos* o *sistema de conjuntos*.

Definición 4.1. El *conjunto potencia* 2^{A} del conjunto A se define como la familia de todos los subconjuntos de A, es decir,

$$2^{A} \coloneqq \{\, B \mid B \subseteq A \,\}$$

Ejemplo: Si $A = \{a, b, c\}$, entonces

$$2^{A} \coloneqq \{\, \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, A \,\}$$

§ 3.1 OPERACIONES FUNDAMENTALES SOBRE CONJUNTOS.

Definición 5.1. Se define la *unión* $A \cup B$ de dos conjuntos A y B como el conjunto de los elementos que pertenecen a A ó a B, es decir,

$$A \cup B \coloneqq \{\, x \mid x \in A \vee x \in B \,\}$$

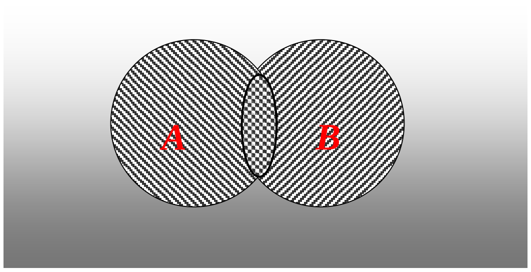


fig. 3. $A \cup B$ (lo rayado)

Propiedades de la Unión:

1) Propiedad Asociativa. Para cualesquiera tres conjuntos A, B y C se tiene:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

2) Propiedad Conmutativa. Para cualesquiera dos conjuntos A y B se tiene:

$$A \cup B = B \cup A$$

Definición 6.1. Se define la *intersección* $A \cap B$ de dos conjuntos A y B como el conjunto de los elementos que pertenecen tanto al conjunto A como al conjunto B, es decir,

$$A \cap B \coloneqq \{\, x \mid x \in A \wedge x \in B \,\}$$

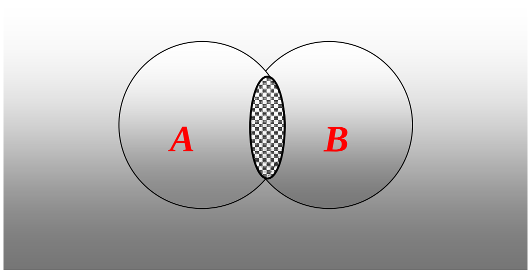


fig. 4. $A \cap B$ (lo rayado)

Propiedades de la Intersección:

1) Propiedad Asociativa. Para cualesquiera tres conjuntos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ se tiene:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

2) Propiedad Conmutativa. Para cualesquiera dos conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ se tiene:

$$A \cap B = B \cap A$$

Propiedades Distributivas:

Para cualesquiera tres conjuntos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ se tiene:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Definición 7.1. Se define el *complemento* del conjunto $\boldsymbol{A}$ como el conjunto de los elementos que no pertenecen a $\boldsymbol{A}$, es decir,

$$A' \coloneqq \{\, x \mid x \notin A \,\}$$

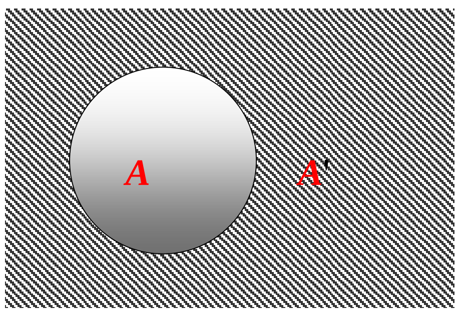


fig. 5. $\boldsymbol{A'}$ (lo rayado)

Definición 8.1. Se define la *diferencia* de un conjunto $\boldsymbol{A}$ y un conjunto $\boldsymbol{B}$ (en ese orden) como el conjunto de los elementos que pertenecen al conjunto $\boldsymbol{A}$ y que no pertenecen al conjunto $\boldsymbol{B}$, es decir,

$$A - B \coloneqq \{\, x \in A \mid x \notin B \,\}$$

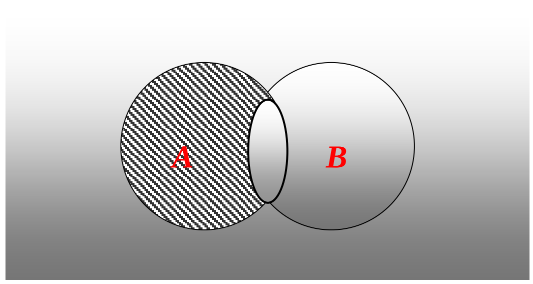


fig. 6. $\boldsymbol{A - B}$ (lo rayado)

Definición 9.1. Se define la *diferencia simétrica* de dos conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ como el conjunto de los elementos que pertenecen ó al conjunto $\boldsymbol{A}$ ó al conjunto $\boldsymbol{B}$, pero no a ambos, es decir,

$$A \triangle B \coloneqq \{\, x \mid (\, x \in A \wedge x \notin B \,) \vee (\, x \notin A \wedge x \in B \,) \,\}$$

De esta manera se puede escribir: $A \triangle B \coloneqq \{\, x \mid x \in A \veebar x \in B \,\}$

De la definición de diferencia simétrica se sigue directamente que

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$

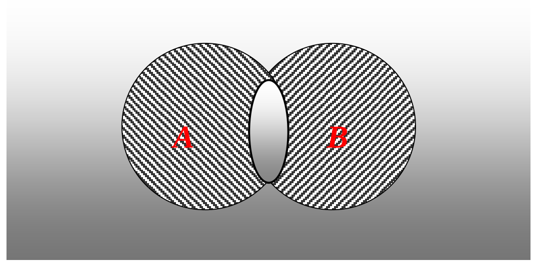


fig. 7. $A \triangle B$ (lo rayado)

Definición 10.1. Se define la *pareja ordenada* (a, b) de dos elementos a y b como el conjunto

$$(a, b) \coloneqq \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

De la definición de pareja ordenada se sigue directamente que

$$(a, b) = (c, d) \Longleftrightarrow (a = c \wedge b = d)$$

Definición 11.1. Se define el *producto cartesiano* $A \times B$ de dos conjuntos A y B como el conjunto

$$A \times B \coloneqq \{ (a, b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B \}$$

De la definición de producto cartesiano se sigue directamente que

$$A \times B \coloneqq B \times A \Longleftrightarrow A = B$$

En este caso se puede escribir A^2 en lugar de $A \times A$.

Diferentes afirmaciones en matemática: como lema, teorema, corolario, etc., tienen la forma $A \Longrightarrow B$, donde A se llama "hipótesis", "condición suficiente"; y B se llama "tesis", "condición necesaria". Se escribirá $A \Longrightarrow T \Longrightarrow B$, en lugar de $(A \Longrightarrow T) \wedge (T \Longrightarrow B)$. La demostración de una afirmación cualquiera (como un lema, un teorema, un corolario, etc.) consiste en la construcción de una cadena de afirmaciones de la forma $A \Longrightarrow T_1 \Longrightarrow T_2 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow T_n \Longrightarrow B$, donde A puede ser un axioma, un postulado, un teorema, lema ó corolario demostrado previamente, T_1 es una afirmación que se deduce inmediatamente de A, y en general, T_i se deduce inmediatamente de T_{i-1}, de la cual se deduce inmediatamente B. En las demostraciones vamos a utilizar las clásica forma de hacer conclusiones, como en la lógica matemática: si A es verdadero y $A \Longrightarrow B$, entonces B también es verdadero. En las demostraciones por reducción al absurdo (o contradicción) vamos a utilizar la forma clásica: si A es verdadero y suponiendo que B es falso, se demuestra que entonces A también es falso, entonces $A \Longrightarrow B$. Se utilizará también, en este caso, el principio del tercer excluido, en el cual, la afirmación $A \vee \neg A$ es verdadera, independientemente de si A lo es ó no.

§ 4.1 AXIOMÁTICA DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS.

En un desarrollo axiomático de alguna de las ramas de la matemática, se comienza por:

1) *términos no definidos* (por ejemplo, conjunto y elemento).
2) *relaciones no indefinidas* (por ejemplo, pertenencia de un elemento a un conjunto).
3) *axiomas que relacionan los términos no definidos y las relaciones no definidas términos indefinidos* (por ejemplo, axioma de extensión, axioma de especificación, axioma de unión, axioma de pareja,… , etc.)

Supongamos que $\mathbf{P}(x)$ es un enunciado (una proposición) de una variable, la cual, para un objeto $a \in U$ puede ser *verdadera* (lo que escribimos como $\mathbf{P}(a)=1$) ó *falsa* (lo que escribimos como $\mathbf{P}(a)=0$). Entonces $\mathbf{P}(x)$ genera un conjunto $A \coloneqq \{\, x \in U \mid \mathbf{P}(x)=1\}$.

Si la proposición $\mathbf{P}(a)$ es verdadera, es decir, si $\mathbf{P}(a)=1$, entonces decimos que a tiene la propiedad $\mathbf{P}$ y escribimos $\mathbf{P}(a)$ en lugar de $\mathbf{P}(a)=1$. Si por el contrario, la proposición $\mathbf{P}(a)$ es falsa, es decir, si $\mathbf{P}(a)=0$, entonces decimos que a no tiene la propiedad $\mathbf{P}$ y escribimos $\neg\mathbf{P}(a)$ en lugar de $\mathbf{P}(a)=0$.

Si el conjunto U es el conjunto universal en discurso, escribiremos $\{\, x \mid \mathbf{P}(x)\,\}$ en lugar de $\{\, x \in U \mid \mathbf{P}(x)\,\}$.

Axioma de extensión. Dos conjuntos A y B son *iguales* si, y sólo si, todo elemento de A es un elemento de B y todo elemento de B es un elemento de A, es decir,

$$A = B \iff ((x \in A \Longrightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Longrightarrow x \in A))$$

Axioma de especificación. Sea $\mathbf{P}(x)$ una proposición y sea A un conjunto. Entonces existe un conjunto

$$B \coloneqq \{\, x \in A \mid \mathbf{P}(x)=1\}$$

El axioma de extensión nos muestra que sólo interesa la propiedad del conjunto, de contener ciertos elementos dados. El axioma de especificación nos muestra que si A en un conjunto y $\mathbf{P}(x)$ es una propiedad, entonces $B \coloneqq \{\, x \in A \mid \mathbf{P}(x)=1\}$ también es un conjunto.

Ejemplo 1. Del axioma de especificación se sigue que en cualquier conjunto A existe un subconjunto vacío $\emptyset_A \coloneqq \{\, x \in A \mid x \neq x\,\}$, y tomando en cuenta el axioma de extensión concluimos que para conjuntos cualesquiera A y B, se tiene $\emptyset_A=\emptyset_B$, es decir, que el conjunto vacío es único y se denota simplemente por $\emptyset$.

Ejemplo 2. Del axioma de especificación se deduce que si A y son conjuntos, entonces que $A - B \coloneqq \{\, x \in A \mid x \notin B\,\}$ también es un conjunto. En particular, si $A \subseteq U$, entonces se tiene que $A' \coloneqq \{\, x \in U \mid x \notin A\,\} = \{\, x \mid x \notin A\,\}$ también es un conjunto.

Axioma de unión. Para cualquier familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in \mathbf{I}}$ de conjuntos, existe un conjunto $\bigcup_{\alpha\in \mathbf{I}} A_\alpha$, formado por aquellos elementos que pertenecen al menos a uno de los conjuntos de la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in \mathbf{I}}$.

$$\bigcup_{\alpha\in \mathbf{I}} A_\alpha \coloneqq \{\, x \mid x \in A_\alpha \text{ para algún } \alpha\in \mathbf{I}\,\}$$

Los axiomas de unión y especificación nos permiten definir la intersección de los conjuntos de la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in \mathbf{I}}$, como el conjunto

$$\bigcap_{\alpha\in \mathbf{I}} A_\alpha \coloneqq \{\, x \in \bigcup_{\alpha\in \mathbf{I}} A_\alpha \;\middle|\; A_\alpha\in\{A_\alpha\}_{\alpha\in \mathbf{I}} \implies x \in A_\alpha \,\} = \{\, x \in \bigcup_{\alpha\in \mathbf{I}} A_\alpha \;\middle|\; x \in A_\alpha \text{ para todo } \alpha\in \mathbf{I} \,\}$$

Axioma de pareja. Para dos conjuntos A y B cualesquiera, existe un conjunto C tal que A y B son sus únicos elementos. El conjunto $C \coloneqq \{ A, B \}$ (*par, no ordenado*) está formado de un sólo elemento, si $A = B$. Entonces la *pareja ordenada* se puede definir como sigue:

$$(A, B) \coloneqq \{ \{ A, A \}, \{ A, B \} \}$$

Así, el concepto de par no ordenado permite definir el concepto de par ordenado, que a su vez permite introducir el conjunto producto, si se utiliza el axioma de especificación junto con el axioma siguiente:

Axioma de conjunto potencia. Para un conjunto A cualquiera, existe una familia $\mathbf{2}^{A}$, formada por aquellos, y sólo aquellos, conjuntos que son subconjuntos de A.

$$\mathbf{2}^{A} \coloneqq \{ B \mid B \subseteq A \}$$

Se tiene entonces:

$$A \times B \coloneqq \{ (a, b) \in \mathbf{2}^{\mathbf{2}^{A}\cup\mathbf{2}^{B}} \mid a \in A \;\wedge\; b \in B \}$$

Axioma de conjunto infinito. Existen los *conjuntos inductivos*.

Esto nos permite formar un sistema del conjunto $\mathbb{N}_0$ (modelo de Newman), como la intersección de todos los conjuntos inductivos.

El conjunto $X^* \coloneqq X \cup \{ X \}$, se llama siguiente del conjunto X.

Un conjunto se llama *inductivo*, si contiene al *conjunto vacío* y al *siguiente* de cada uno de sus elementos.

$$\emptyset,\ \emptyset^* \coloneqq \emptyset \cup \{\emptyset\},\ \emptyset^{**} \coloneqq \emptyset^* \cup \{\emptyset^*\},\ \ldots$$

Los elementos $\emptyset \eqqcolon 0$, $\emptyset^* \eqqcolon 1$, $\emptyset^{**} \eqqcolon 2$, $\emptyset^{***} \eqqcolon 3$, … ; son llamados números cardinales.

Axioma de sustitución. Sea $\mathbf{P}(x, y)$ un enunciado formal de dos variables, tal que para cualquier $a \in A$, existe un único elemento $b \in B$ para los cuales $\mathbf{P}(a, b)$ es verdadera, es decir, $\mathbf{P}(a, b) = 1$. Entonces los objetos $b \in B$, para cada uno de los cuales existe un elemento $a \in A$, con los cuales $\mathbf{P}(a, b) = 1$, forman un conjunto.

Estos siete primeros axiomas componen la axiomática de la teoría de conjuntos, conocida como la axiomática de ***Zermelo - Fraenkel***.

Axioma de elección. Para cualquier familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{I}}$ de conjuntos A_α no vacíos ($A_\alpha\neq\emptyset\ \forall\ \alpha\in \mathbf{I}$), existe un conjunto E cuya intersección $E \cap A_\alpha$ con cada uno de los conjuntos A_α, está formada por un único elemento.

En el presente trabajo no se pretende obtener una teoría axiomática de conjuntos por lo cual solamente mencionaremos algunas de las propiedades fundamentales de los conjuntos, sin embargo, la tabla que sigue nos proporciona una serie de leyes de las cuales se puede deducir la mayoría de las propiedades fundamentales de los conjuntos y sus operaciones.

§ 5.1 PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES CON CONJUNTOS

Leyes de Idempotencia

$A \cup A = A$ $\qquad$ $A \cap A = A$

Leyes Asociativas

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $\qquad$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Leyes Conmutativas

$A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A$

Leyes Distributivas

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\qquad$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Leyes de Identidad

$A \cup \varnothing = A$; $\quad A \cup U = U$ $\qquad$ $A \cap \varnothing = \varnothing$; $\quad A \cap U = A$

Leyes de Complemento

$A \cup A' = U$; $\quad (A')' = A$ $\qquad$ $A \cap A' = \varnothing$; $\quad U' = \varnothing$; $\quad \varnothing' = U$

Leyes de De Morgan

$(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)' = \bigcap_{\alpha \in I} A'_\alpha$ $\qquad$ $(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)' = \bigcup_{\alpha \in I} A'_\alpha$

Leyes de Diferencia

$A - B = (A \cap B')$ $\qquad$ $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$

La relación $A \subseteq B$ se puede definir como:

$A \subseteq B \iff A \cap B = A$, ó bien como $A \subseteq B \iff A \cup B = B$.

Las proposiciones que a continuación se dan pueden deducirse de las propiedades enteriores y sus demostraciones se dejan como ejercicio para el lector.

La relación de contención $\subseteq$ tiene las siguientes propiedades para conjuntos A, B y C cualesquera, se tiene:

1) $A \subseteq B$.
2) $A \subseteq B$ y $B \subseteq A \iff A = B$.
3) Si $A \subseteq B$ y $A \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

Para conjuntos A, B, C y D cualesquera, se tiene:

1) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.
2) $A \subseteq C$ y $B \subseteq C \iff A \cup B \subseteq C$.
3) Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$, entonces $A \cap B \subseteq C \cap D$ y $A \cup B \subseteq C \cup D$.

Para conjuntos A, B cualesquera, se tiene:

1) $A - B = \varnothing \iff A \subseteq B$.
2) $A \cap B = A - (A - B)$.

Para conjuntos A, B cualesquera y si $A \cup B \subseteq X$, se tiene:

1) $A - B = A \cap (X - B)$.
2) $A \cap (X - A) = \varnothing$, $A \cup (X - A) = X$.
3) $X - (X - A) = A$.
4) $X - \varnothing = X$, $X - X = \varnothing$.
5) $A \subseteq B \iff X - B \subseteq X - A$.
6) $X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B)$.
7) $X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$.

Para cualesquiera dos conjuntos A, B y C se tiene:

1) $A \triangle \varnothing = A$.
2) $A \triangle A = \varnothing$.
3) $A \triangle B = B \triangle A$.
4) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.
5) $A \triangle B = A \triangle C \implies B = C$.
6) $A \triangle B = C \implies B = A \triangle C$.
7) $A \triangle (A \triangle C) = C$.

Las operaciones de unión $A \cup B$ y diferencia $A - B$ se pueden expresar mediante las operaciones de diferencia simétrica $A \triangle B$ e intersección $A \cap B$, de la suguiente manera:

$A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B)$.
$A - B = A \triangle (A \cap B)$.

Las operaciones de diferencia simétrica $A \triangle B$ e intersección $A \cap B$ se pueden expresar mediante las operaciones de unión $A \cup B$ y diferencia $A - B$, de la suguiente manera:

$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$.
$A \cap B = (A \cup B) - [(A - B) \cup (B - A)]$

Las operaciones de unión $A \cup B$, diferencia $A - B$ y diferencia simétrica $A \triangle B$ se pueden expresar mediante las operaciones de intersección $A \cap B$ y complemento A', de la suguiente manera:

$A \cup B = (A' \cap B')'$
$A - B = A \cap B'$.
$A \triangle B = [(A \cap B')' \cap (A' \cap B)']'$

Lema 1. Para cualesquiera dos conjuntos A, B y C se tiene:

1) $A \triangle B = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$
2) $A \triangle B = (A \cup B) \cap (A' \cup B')$
3) $(A \triangle B)' = (A \cap B) \cup (A' \cap B')$
4) $(A \triangle B)' = (A \cup B') \cap (A' \cup B)$.

Demostración. $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$ definición de diferencia simétrica.
$= (A \cap B') \cup (A' \cap B)$ definición de diferencia.

Esto demuestra 1).

$A \triangle B = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$ igualdad 1)
$= [A \cup (A' \cap B)] \cap [B' \cup (A' \cap B)]$. propiedad distributiva
$= [(A \cup A') \cap (A \cup B)] \cap [(B' \cup A') \cap (B' \cup B)]$ propiedad distributiva
$= [U \cap (A \cup B)] \cap [(B' \cup A') \cap U]$ propiedad de complemento
$= (A \cup B) \cap (A' \cup B')$. Esto demuestra 2). propiedad de identidad

Las demostraciones de 3) y 4) se realizan utilizando 1) y 2) y las leyes de De Morgan. ■

Teorema 1.1. La diferencia simétrica de conjuntos es asociativa, es decir, para cualesquiera tres conjuntos A, B y C, se tiene

$$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$$

Demostración.

$A \triangle (B \triangle C) =$
$= [A \cup (B \triangle C)] \cap [A' \cup (B \triangle C)']$ igualdad 2) del lema.
$= \{A \cup [(B \cup C) \cap (B' \cup C')]\} \cap \{A' \cup [(B \cup C') \cap (B' \cup C)]\}$ igualdades 2) y 4) del lema.
$= [A \cup (B \cup C)] \cap [A \cup (B' \cup C')] \cap [A' \cup (B \cup C')] \cap [A' \cup (B' \cup C)]$ propiedad distributiva.
$= [A \cup (B \cup C)] \cap [A' \cup (B' \cup C)] \cap [A \cup (B' \cup C')] \cap [A' \cup (B \cup C')]$ propiedad conmutativa.
$= [(A \cup B) \cup C] \cap [(A' \cup B') \cup C] \cap [(A \cup B') \cup C'] \cap [(A' \cup B) \cup C']$ propiedad asociativa.
$= \{[(A \cup B) \cap (A' \cup B')] \cup C\} \cap \{[(A' \cup B) \cap (A \cup B')] \cup C'\}$ propiedad distributiva.
$= [(A \triangle B) \cup C)] \cap [(A \triangle B)' \cup C']$ igualdades 2) y 4) del lema.
$= (A \triangle B) \triangle C$. igualdad 2) del lema.■

Ejemplos:

1) Sea A el conjunto de los números impares que no sean divisibles por tres.

2) Sea B el conjunto de los números pares.

3) Sea C el conjunto de los números enteros divisibles por tres.

Entonces $A \cap C$ consiste en todos los enteros divisibles por seis.

4) Sea A_n el conjunto de los números racionales cuyo valor absoluto es menor que $\frac{1}{n}$, donde **n** es un número natural.

Entonces la intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ consiste en un sólo número 0.

5) Sea A_n el conjunto de los números racionales positivos menores que $\frac{1}{n}$.

Entonces la intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es vacía.

§ 6.1 Relaciones Binarias

Relaciones Binarias

Un enunciado formal sobre el conjunto producto $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, es una proposición $\mathbf{P}(x, y)$, la cual para un par ordenado $(a, b) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ puede ser verdadera (lo que escribimos como $\mathbf{P}(a, b)=1$) o falsa (lo que escribimos como $\mathbf{P}(a, b)=0$).

Una *relación binaria* consiste en:

1) un conjunto $\boldsymbol{A}$
2) un conjunto $\boldsymbol{B}$
3) un enunciado formal $\mathrm{P}(x, y)$, el cual es verdadero o falso para cada par $(x, y) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$

$$\mathcal{R} \coloneqq \{\, (x, y) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \mid \mathbf{P}(x, y)=1\}$$

Si la proposición $\mathbf{P}(x, y)$ es verdadera para el par $(a, b) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, se escribe

$$(a, b) \in \mathcal{R}, \text{ o simplemente } a\,\mathcal{R}\,b$$

Si, por el contrario, la proposición $\mathbf{P}(x, y)$ no es verdadera para $(a, b) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, se escribe

$$(a, b) \notin \mathcal{R}, \text{ o simplemente } a\,\not\mathcal{R}\,b$$

Definición 12.1. Una *relación binaria* $\mathcal{R}$ sobre el producto $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ es un subconjunto de $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, es decir, $\mathcal{R} \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$.

Relación inversa. La *inversa* $\mathcal{R}^{-1}$ *de la relación* $\mathcal{R} \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ es una relación sobre el producto $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$ que se define como

$$\mathcal{R}^{-1} \coloneqq \{\, (y, x) \in \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} \mid (x, y) \in \mathcal{R}\,\}.$$

Composición de Relaciónes. Sean $\mathcal{R}_1 \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ y $\mathcal{R}_2 \subseteq \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$, dos relaciones entonces la *composición* $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ sobre el producto $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}$ *de las relaciones* $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ se define de la siguiente manera:

$$\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1 \coloneqq \{\, (x, z) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C} \mid (x, y) \in \mathcal{R}_1 \wedge (y, z) \in \mathcal{R}\mathcal{R}_2 \text{ para algún } y \in \boldsymbol{B}\}$$

Recta vertical. Se llama *recta vertical* que pasa por el elemento $a \in \boldsymbol{A}$ a la relación

$$\{a\} \times \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$$

Recta horizontal. Se llama *recta horizontal* que pasa por el elemento $b \in \boldsymbol{B}$ a la relación

$$\boldsymbol{A} \times \{b\} \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$$

Clasea derecha. La *clase derecha* $a\mathcal{R}$ de $a \in \boldsymbol{A}$ respecto a la relación $\mathcal{R} \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, se define como el conjunto

$$a\mathcal{R} \coloneqq \{\, y \in \boldsymbol{B} \mid (a, y) \in \mathcal{R}\,\}.$$

Clase izquierda. Sea $\mathcal{R} \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ una relación binaria. La *clase izquierda* $\mathcal{R}b$ de $b \in \boldsymbol{B}$ se define como el conjunto

$$\mathcal{R}b \coloneqq \{\, x \in \boldsymbol{A} \mid (x, b) \in \mathcal{R}\,\}.$$

§ 7.1 MAPEOS. MAPEOS INYECTIVOS, SOBREYECTIVOS Y BIYECTIVOS.

Definición 13.1. Una relación binaria $f \subseteq A \times B$ sobre el producto $A \times B$ es un *mapeo* (ó una *aplicación*) de A a B, si

$$\forall\, a \in A \quad \exists!\, b \in B \;\big|\; (a, b) \in f$$

Si $f \subseteq A \times B$, es un mapeo, entonces se denota este como

$$f\colon A \to B \text{ ó como } A \xrightarrow{f} B$$

Además, se escribe $b = f(a)$ en lugar de $(a, b) \in f$, y se dice que $b \in B$ es la imagen de $a \in A$ bajo el mapeo f.

Obsérvese que una relación $f \subseteq A \times B$ es un mapeo si, y sólo si toda recta vertical $\{a\} \times B$ intersecta con f en un único elemento, es decir

$$\forall\, a \in A, \exists!\, (a\,, b) \in f \cap (\{a\} \times B).$$

Dos mapeos $f_1\colon A_1 \to B_1$ y $f_2\colon A_2 \to B_2$ son iguales, si $A_1 = A_2$ y $f_1(x) = f_2(x)\ \forall a \in A_1$. Esto implica que $f(A_1) \subseteq B_1 \cap B_2$.

Imagen de un mapeo. La *imagen de un mapeo* $f\colon A \to B$ se define como el conjunto

$$f(A) \coloneqq \{\, y \in B \;\big|\; y = f(x) \text{ para algún } x \in A \,\}.$$

Restricción y Prolongación. Sea $f\colon A \to B$ un mapeo. Si $D \subseteq A$, entonces como $f|_D$ se denota el mapeo $g\colon D \to B$, que coincide con f en D, es decir, $f|_D(x) = f(x)\ \forall\, a \in D$. El mapeo $f|_D$ es llamado *restricción* del mapeo f al conjunto $D \subseteq A$, y el mapeo $f\colon A \to B$ con relación al mapeo $g = f|_D\colon D \to B$ es llamado *prolongación* del mapeo g al conjunto A.

Mapeo identidad. El *mapeo identidad* o *mapeo unidad* $1_A\colon A \to A$ se define como el mapeo que asigna a cada elemento el mismo, es decir,

$$f(a) \coloneqq a \qquad \forall\, a \in A$$

Mapeo constante. Un *mapeo constante* k: $A \to B$ se define como un mapeo cuya imagen consta de un único elemento, es decir,

$$f(a) \coloneqq k \in B \qquad \forall\, a \in A$$

Imagen de un conjunto. La *imagen de un subconjunto* $C \subseteq A$ bajo el mapeo $f\colon A \to B$ es el conjunto de los elementos de B, que son imágenes de los elementos del conjunto C, es decir,

$$f(C) \coloneqq \{\, y \in B \;\big|\; y = f(x) \text{ y } x \in C \,\}.$$

Preimagen de un elemento. La *preimagen de un elemento* $b \in B$ bajo el mapeo $f\colon A \to B$ es el conjunto de los elementos de A que tienen al elemento b por imagen, es decir,

$$f^{-1}(b) \coloneqq \{\, x \in A \;\big|\; f(x) = b \,\}.$$

Preimagen de un conjunto. La *preimagen de un subconjunto* $\boldsymbol{D} \subseteq \boldsymbol{B}$ bajo el mapeo f: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ es el conjunto de los elementos de $\boldsymbol{A}$, cuyas imágenes se encuentran en el conjunto $\boldsymbol{D}$, es decir,

$$f^{-1}(\boldsymbol{C}) \coloneqq \{\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \mid f(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{D} \,\}.$$

Pequeña Imagen. La *pequeña imagen de un subconjunto* $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{A}$ bajo el mapeo f: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ es el conjunto de los elementos $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}$, cuya preimagen está contenida $\boldsymbol{C}$, es decir,

$$f^{\#}(\boldsymbol{C}) \coloneqq \{\, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B} \mid f^{-1}(\boldsymbol{y}) \subseteq \boldsymbol{C} \,\}.$$

Se puede comprobar fácilmente que $f^{\#}(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B} - f(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{C})$.

De la definición de pequeña imagen se sigue que los elementos que tienen una preimagen vacía pertenecen a la pequeña imagen de cualquier subconjunto $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{A}$.

Mapeo inyectivo. Un mapeo f: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ es *inyectivo* (lo que se denota como f: $\boldsymbol{A} \rightrightarrows \boldsymbol{B}$, si

$$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b} \quad \Longrightarrow \quad f(\boldsymbol{a}) \neq f(\boldsymbol{b})$$

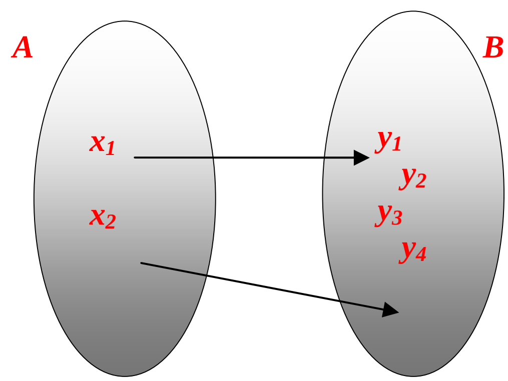


fig. 8 Mapeo *inyectivo*

Obsérvese que un mapeo f: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ es inyectivo si, y sólo si, ninguna recta horizontal $\boldsymbol{A} \times \{\boldsymbol{b}\}$ intersecta con f en más de un elemento, es decir

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}), (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) \in f \cap (\boldsymbol{A} \times \{\boldsymbol{b}\}) \Longrightarrow (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}).$$

Mapeo sobreyectivo. Un mapeo f: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ es *sobreyectivo* (lo que se denota como f: $\boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{B}$), si

$$\forall\, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B} \;\exists\, \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b} = f(\boldsymbol{a})$$

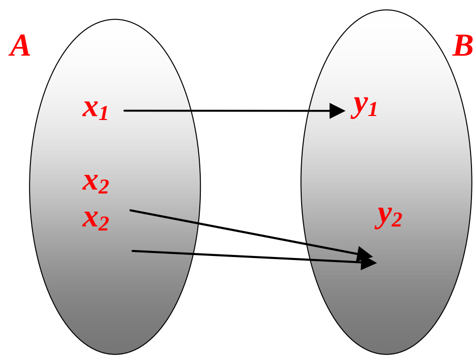


fig. 9 Mapeo *sobreyectivo*

Obsérvese que un mapeo $f \subseteq A \to B$ es sobreyectivo si, y sólo si, toda recta horizontal $A \times \{b\}$ intersecta con f, es decir,

$$\forall\, b \in B,\ (A \times \{b\}) \cap f \neq \varnothing.$$

Consecuentemente $f^{\#}(C) \subseteq f(C)$ si f es un mapeo sobreyectivo.

Mapeo biyectivo. Un mapeo $f\colon A \to B$ es *biyectivo* (lo que se denota como $f\colon A \rightleftarrows B$), si

1) f es inyectivo.
2) f es sobreyectivo.

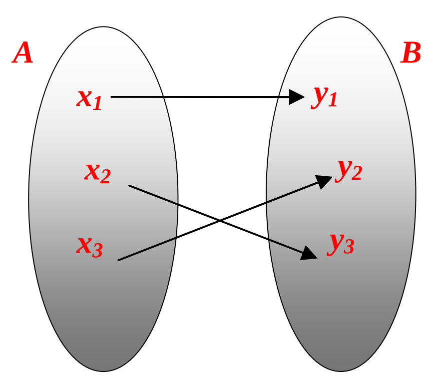


fig. 10 Mapeo *biyectivo*

Obsérvese que un mapeo $f\colon A \to B$ es biyectivo si, y solo si, toda recta horizontal $\{a\} \times B$ intersecta con f en un único elemento, es decir,

$$\forall\, b \in B\ \exists!\ (a, b) \in (A \times \{b\}) \cap f$$

Mapeo inverso. Si un mapeo $f\colon A \to B$ es biyectivo, es decir, si $f\colon A \rightleftarrows B$, entonces para cada elemento $b \in B$ existe un único elemento $a \in A$ para el que $f(a) = b$, es decir,

$$\forall\, b \in B\ \ \exists!\ \ a \in A \ \big|\ \ f(a) = b$$

lo que define un mapeo f^{-1}: $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$ por la igualdad $f^{-1}(\boldsymbol{b}) \coloneqq \boldsymbol{a}$, llamado *mapeo inverso* de f.

Mapeo compuesto. La *composición de los mapeos* f: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ y g: $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ es un mapeo $g \circ f$: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C}$, llamado *mapeo compuesto*, que se define de la siguiente manera:

$$(g \circ f)(\boldsymbol{a}) \coloneqq g(f(\boldsymbol{a})) \quad \forall\, \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$$

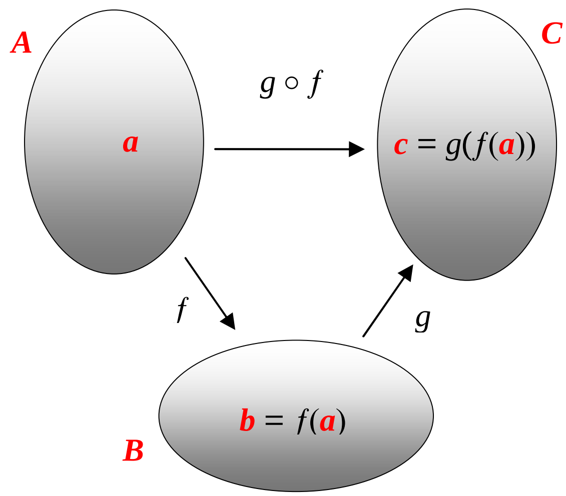


fig. 11 *Composición de mapeos*

Para cualquier mapeo f: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, se tiene $f \circ 1_{\boldsymbol{A}} = f$ y $1_{\boldsymbol{B}} \circ f = f$. En general, la composición de mapeos no es conmutativa, es decir, $g \circ f \neq f \circ g$, por ejemplo, si g,f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ son mapeos definidos como $f(\mathrm{n}) = 3\mathrm{n} + 2$ y $g(\mathrm{n}) = \mathrm{n} + 3$ respectivamente, se tiene entonces $(g \circ f)(\mathrm{n}) = 3\mathrm{n} + 5 \neq$ $\neq 3\mathrm{n} + 11 = (f \circ g)(\mathrm{n})$

Lema 2. La composición de mapeos es asociativa, es decir, sean f: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, g: $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ y h: $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$. Entonces

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Demostración. Para cualquier $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$, se tiene

$$(h \circ (g \circ f))(\boldsymbol{x}) = h \circ (g(f(\boldsymbol{x})) = h(g(f(\boldsymbol{x}))) = h((g \circ f)(\boldsymbol{x})) = ((h \circ g) \circ f)(\boldsymbol{x}). \blacksquare$$

Lema 3. La composición de mapeos inyectivos es un mapeos inyectivo y La composición de mapeos sobreyectivos es un mapeo sobreyectivo.

Demostración. Sean f: $\boldsymbol{A} \rightrightarrows \boldsymbol{B}$, y g: $\boldsymbol{B} \rightrightarrows \boldsymbol{C}$ dos mapeos inyectivos. Entonces, para el mapeo compuesto $g \circ f$: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C}$, si $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{A}$, se tiene,

Como f es inyectivo, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$ implica, $f(\boldsymbol{a}) \neq f(\boldsymbol{b})$, y como g es inyectivo $f(\boldsymbol{a}) \neq f(\boldsymbol{b})$ implica, $g \circ f(\boldsymbol{a}) = g(f(\boldsymbol{a})) \neq g(f(\boldsymbol{b})) = g \circ f(\boldsymbol{b})$, esto es, $g \circ f$: $\boldsymbol{A} \rightrightarrows \boldsymbol{C}$ es un mapeo inyectivo.

Sean ahora f: $\boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{B}$, y g: $\boldsymbol{B} \mapsto \boldsymbol{C}$ dos mapeos sobreyectivos. Como f es sobreyectivo, $f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}$, y como g es sobreyectivo, $g(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{C}$, por lo que implica, $g \circ f(\boldsymbol{A}) = g(f(\boldsymbol{A})) = g(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{C}$, esto es, $g \circ f$: $\boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{C}$ es un mapeo sobreyectivo. $\blacksquare$

Lema 4. Si $g \circ f = 1_A$, entonces g es un mapeo sobreyectivo y f es un mapeo inyectivo.

Demostración. Como $A = 1_A(A) = (g \circ f)(A) = g(f(A)) \subseteq g(B)$, entonces g es sobreyectivo.

Sean a_1 , $a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$. Entonces $1_A(a_1) \neq 1_A(a_2)$ por lo que $(g \circ f)(a_1) \neq (g \circ f)(a_2)$, esto es $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$ y, por lo tanto $f(a_1) \neq f(a_2)$, lo que significa que f es inyectivo. ■

Teorema 4.1. Sea f: $A \rightleftarrows B$ un mapeo biyectivo, es decir, el mapeo inverso f^{-1} existe. Entonces

$$f^{-1} \circ f = 1_A \text{ y } f \circ f^{-1} = 1_B.$$

Demostración. Sean f: $A \to B$ y g: $B \to A$. Del lema anterior se tiene que si $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$, entonces f y g son biyectivos, lo que demuestra que $y = f(x) \Longleftrightarrow x = g(y)$, esto es,

$$g = f^{-1}. \blacksquare$$

Mapeo de elección. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in \mathbf{I}}$ una familia de subconjuntos no vacíos ($A_\alpha \neq \varnothing \quad \forall \alpha \in \mathbf{I}$). Un mapeo f:$\{A_\alpha\}_{\alpha\in \mathbf{I}} \to \bigcup_{\alpha\in\mathbf{I}} A_\alpha$, en el cual $f(A_\alpha) \in A_\alpha \ \forall\alpha\in\mathbf{I}$, se llama *mapeo de elección*.

Axioma de elección. Para toda familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in \mathbf{I}}$ de conjuntos A_α no vacíos ($A_\alpha \neq \varnothing \ \forall \ \alpha \in \mathbf{I}$), existe un mapeo de elección.

Sea $A \times B$ el producto de $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{R}$.

La recta horizontal Ox ≔ $\{ (x, 0) \mid (x, 0) \in A \times B \}$ es llamada eje de coordenadas abscisas (o simplemente eje de las absisas) o eje horizontal.

La recta vertical Oy ≔ $\{ (0, y) \mid (0, y) \in A \times B \}$ es llamada eje de coordenadas ordenadas (o simplemente eje de las ordenadas) o eje vertical.

La intersección Ox ∩ Oy de los ejes coordenados Ox y Oy consta de un único punto (0, 0) llamado origen de coordenadas y se denota como Oxy.

Función. Un mapeo que tiene por codominio a un conjunto de números se llama *función*.

Función característica. La *función característica* χ_A de un conjunto A, es un mapeo χ_A: $A \to \{0,1\}$ que se define por la siguiente igualdad

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1; & \text{si } x \in A \\ 0; & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Como $\mathbf{C}(X)$ se denota la familia de todas las funciones características de los subconjuntos de X, es decir,

$$\mathbf{C}(X) := \{ \chi_A \mid A \subseteq X \}$$

Funciones periódicas. Una función f: $A \to B \subset \mathbb{R}$, en donde $A \subset \mathbb{R}$, se llama *periódico*, con periodo $p \in \mathbb{R}$, si

$$f(a + p) = f(a) \ \forall \ a \in A$$

Funciones pares. Una función f: $A \to B$, en donde $A \subset \mathbb{R}$, se llama *par*, si

$$f(-a) = f(a) \ \forall \ a \in A$$

La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje vertical Oy.

Funciones impares. Una función f: $A \to B$, en donde $A \subset \mathbb{R}$, *impar*, si

$$f(-a) = -f(a) \ \forall \ a \in A$$

La gráfica de una función par es simétrica con respecto al origen de coordenadas Oxy.

Álgebra de funciones. Sean f, g: $B \to C \subset \mathbb{R}$ dos funciones que tienen el mismo dominio de definición. Entonces sus funciones *suma*, *resta*, *producto* y *cociente* se definen correspondientemente por:

$$(f + g)(x) \coloneqq f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) \coloneqq f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) \coloneqq f(x)\, g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \coloneqq \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ si } g(x) \neq 0 \text{ para } x \in B.$$

Además, si h: $A \to B \subset \mathbb{R}$, entonces

$$((f \pm g) \circ h)(x) = (f \pm g)(h(x)) = f(h(x)) \pm g(h(x)) = (f \circ h)(x) \pm (g \circ h)(x)$$

$$((fg) \circ h)(x) = (fg)(h(x)) = f(h(x))\, g(h(x)) = (f \circ h)(x)\, (g \circ h)(x)$$

$$\left(\left(\frac{f}{g}\right) \circ h\right)(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(h(x)) = \frac{f(h(x))}{g(h(x))} = \frac{(f \circ h)(x)}{(g \circ h)(x)}, \text{ si } g(x) \neq 0 \text{ para } x \in B.$$

Ejemplos.

1) Sea $\mathbb{Z}^+$ el conjunto de los número enteros positivos y $\mathbb{Z}^-$ el conjunto de los números enteros negativos.

Entonces existe una "correspondencia biunívoca" entre el conjunto $\mathbb{Z}^+$ y el conjunto $\mathbb{Z}^-$, es decir, se puede definir una función biyectiva f: $\mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^-$ de la forma $f(z) \coloneqq -z$.

2) Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los número naturales, es decir, el conjunto $\mathbb{Z}^+$ de los números enteros positivos y sea $2\mathbb{N}$ el conjunto de los número negativos pares.

Entonces existe una "correspondencia biunívoca" entre el conjunto $\mathbb{N}$ y el conjunto $2\mathbb{N}$, es decir, se puede definir una función biyectiva f: $\mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ de la forma $f(n) \coloneqq 2n$.

§ 8.1 OPERACIONES BINARIAS: OPERACIONES ASOCIATIVAS Y CONMUTATIVAS.

Definición 14.1. Una *operación binaria* en un conjunto A es un mapeo del producto cartesiano $A \times A$ en A, es decir,

$$*: A \times A \to A.$$
$$(a, b) \to *(a, b) =: a * b$$

Operación asociativa. La operación binaria $*: A \times A \to A$ es *asociativa* si $\forall\ a, b, c \in A$,

$$*(*(a, b), c)) = *(a, *(b, c)) \text{ es decir, } (a * b) * c = a * (b * c)$$

Operación conmutativa. La operación binaria $*: A \times A \to A$ es *conmutativa* si $\forall\ a, b \in A$

$$*(a, b) = *(b, a) \text{ es decir, } a * b = b * a$$

Operación distributiva. La operación binaria $\bullet: A \times A \to A$ es *distributiva* con respecto a la operación binaria asociativa $*: A \times A \to A$ si $\forall\ a, b, c \in A$,

$$\bullet(a, *(b, c)) = *(\bullet(a, b), \bullet(a, c)) \text{ es decir, } a \bullet (b * c) = (a \bullet b) * (a \bullet c)$$

Elemento neutro. Sea $*: A \times A \to A$ un operación binaria. Un elemento $e \in A$ se llama *elemento neutro* para la operación $*: A \times A \to A$ si $\forall\ a \in A$

$$*(e, a) = *(a, e) = a, \text{ es decir, } e * a = a * e = a.$$

Teorema 5.1. Si una operación binaria tiene elemento neutro, este es único.

Demostración. Sean e y e' $\in A$ dos elementos neutros de la operación $* : A \times A \to A$. Se tiene entonces

$$e = *(e, e') = *(e', e) = e'. \blacksquare$$

Elemento inverso. Sea $*: A \times A \to A$ un operación binaria que tiene elemento neutro $e \in A$. El *inverso del elemento* $a \in A$ es un elemento $a^{-1} \in A$ tal que

$$*(a^{-1}, a) = *(a, a^{-1}) = e, \text{ es decir, } a^{-1} * a = a * a^{-1} = e.$$

Teorema 6.1. En una operación binaria asociativa, si el inverso de un elemento existe, entonces es único.

Demostración. Sean x y $x' \in A$ dos elementos inversos del elemento $a \in A$ bajo la operación $*: A \times A \to A$. Se tiene entonces $*(a , x) = e \in A$, además

$$x = *(x, e) = *(x, *(a, x')) = *(*(x, a), x') = *(e, x') = x'. \blacksquare$$

§ 9.1 Relaciones Binarias Entre Elemetos de un Conjunto.

Tipos de relaciones binarias definidas sobre un conjunto A:

La *diagonal* Δ_A sobre el producto $A \times A$ es una relación $\Delta_A \subseteq A \times A$ definida como

$$\Delta_A := \{\, (x, x) \in A \times A \mid x \in A \,\} = \{\, (x, y) \in A \times A \mid x = y \,\}.$$

Obsérvese que la diagonal es el mapeo identidad, es decir $1_A = \Delta_A$.

1) *Relación reflexiva*. Una relación $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ es *reflexiva* si

$$\forall\, a \in A \qquad (a, a) \in \mathcal{R}$$

2) *Relación simétrica*. Una relación $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ es *simétrica* si

$$(a, b) \in \mathcal{R} \quad \Longrightarrow \quad (b, a) \in \mathcal{R}$$

3) *Relación transitiva*. Una relación $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ es *transitiva* si

$$(a, b) \in \mathcal{R} \quad \wedge \quad (b, c) \in \mathcal{R} \quad \Longrightarrow \quad (a, c) \in \mathcal{R}$$

4) *Relación antisimétrica*. Una relación $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ es *antisimétrica* si

$$(a, b) \in \mathcal{R} \quad \wedge \quad (b, a) \in \mathcal{R} \quad \Longrightarrow \quad a = b$$

5) *Relación asimétrica*. Una relación $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ es *asimétrica* si

$$(a, b) \in \mathcal{R} \quad \Longrightarrow \quad (b, a) \notin \mathcal{R}$$

De las definiciones se deduce lo siguiente: Una relación $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ es

reflexiva si y sólo si	$\Delta_A \subseteq \mathcal{R}$
simétrica si y sólo si	$\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$
transitiva si y sólo si	$\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$
antisimétrica si y sólo si	$\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subseteq \Delta$
asimétrica si y sólo si	$\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} = \emptyset$

Relación de preorden. Una relación $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ es una relación de *preorden*, si

$\mathcal{R}$ es reflexiva, $\mathcal{R}$ es transitiva.

Relación de equivalencia. Una relación $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ es una relación de *equivalencia* (misma que se denota como $\sim$), si

$\mathcal{R}$ es reflexiva, $\mathcal{R}$ es simétrica, $\mathcal{R}$ es transitiva.

Relación de orden parcial. Una relación $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ es una relación de *orden parcial* (misma que se denota como $\precsim$), si

$\mathcal{R}$ es reflexiva, $\mathcal{R}$ es antisimétrica, $\mathcal{R}$ es transitiva.

Relación de orden estricto. Una relación $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ es una relación de *orden estricto* (misma que se denota como $\prec$), si

$\mathcal{R}$ es asimétrica, $\mathcal{R}$ es transitiva.

RELACIONES DE EQUIVALENCIA.

Si $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ es una relación de equivalencia sobre un conjunto A, es decir, una relación binaria que es reflexiva, simétrica y transitiva, se denota esta como $\sim\ \subseteq A \times A$. En este caso, en lugar de $(a, b) \in \mathcal{R}$, se escribe $a \sim b$ y se dice que a es *equivalente* a b.

Partición de un conjunto. Se dice que una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de subconjuntos no vacíos A_α de A, forma una *partición* de A si

1) $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = A$
2) $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$, si $\alpha \neq \beta$.

es decir, si A es la unión disjunta de los elementos de la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$, lo que denotaremos simplemente como $A = \bigsqcup_{\alpha\in I} A_\alpha$.

Clases de equivalencia. El conjunto $[a] \coloneqq \{\, x \in A \mid x \sim a \,\}$, se llama la *clase de equivalencia* del elemento $a \in A$, bajo la relación de equivalencia $\sim\ \subseteq A \times A$.

Nótese que en una relación de equivalencia, las clases derecha e izquierda coinciden, es decir $\forall\, x \in A$, $[a] = a\mathcal{R} = \mathcal{R}a$.

Conjunto cociente. El conjunto $A/\sim$ de las clases $[a]$ de equivalencia de los elementos $a \in A$, se llama *conjunto cociente* de A definido por la relación de equivalencia $\sim\ \subseteq A \times A$.

Teorema 2.1. Sea $\sim\ \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Entonces la familia $A/\sim\ = \{[a]\}_{a\in A}$ de todas las clase de equivalencia $[a]$ de los elementos del conjunto A, forma una partición de A.

Demostración. Puesto que $\forall a\in A$, por la propiedad reflexiva de la relación de equivalencia, se tiene $a \sim a$, es decir $a \in [a]$, lo que significa que $\bigcup_{a\in A} [a] = A$. Falta demostrar que

$$[a] \cap [b] \neq \emptyset \Longrightarrow [a] = [b].$$

Obsérvese primero que, si $x \in ([a] \cap [b]) \neq \emptyset$, entonces $x \in [a]$, lo que significa que $x \sim a$; y $x \in [b]$, lo que significa que $x \sim b$. Por la propiedad simétrica de $\sim$, se tiene que $b \sim x$; y por la propiedad transitiva de $\sim$, se tiene que $b \sim a$; esto es $b \in [a]$. Además, por la propiedad simétrica de la relación $\sim$, se tiene que $a \sim b$; esto es $a \in [b]$.

Si $x \in [a]$, entonces, $x \sim a$. Como $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, entonces $a \sim b$, por lo que, por la propiedad transitiva de $\sim$, se tiene que $x \sim b$; lo que significa que $x \in [b]$. Es decir,

$$x \in [a] \Longrightarrow x \in [b], \text{ esto es, } [a] \subseteq [b].$$

Análogamente, si $x \in [b]$, entonces, $x \sim b$. Como $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, entonces $b \sim a$, por lo que, por la propiedad transitiva de $\sim$, se tiene que $x \sim a$; lo que significa que $x \in [a]$. Es decir,

$$x \in [b] \Longrightarrow x \in [a], \text{ esto es, } [b] \subseteq [a].$$

Por lo tanto, se tiene $[a] = [b]$. ■

Teorema 3.1 (inverso del teorema 2). Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una partición del conjunto A. Entonces $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ define una relación de equivalencia en A.

Demostración. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una partición del conjunto A, es decir, $A = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$; donde $A_\alpha \neq \varnothing \; \forall \alpha \in I$ y $A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing$, si $\alpha \neq \beta$.

Sea $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ la relación definida por el enunciado

$$\mathbf{P}(x, y) \coloneqq \text{“}x \text{ está en el mismo conjunto de } \{A_\alpha\}_{\alpha\in I} \text{ que } y\text{”},$$

es decir, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid x, y \in A_\alpha \text{ para algún } A_\alpha \in \{A_\alpha\}_{\alpha\in I}\}$.

Entonces $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ es una relación de equivalencia en A, es decir,

$$x \,\mathcal{R}\, y \iff \exists\, A_\alpha \in \{A_\alpha\}_{\alpha\in I} \mid x, y \in A_\alpha.$$

$\forall\, a \in A = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$, entonces $\exists\, A_\alpha \in \{A_\alpha\}_{\alpha\in I} \mid a \in A_\alpha$, por lo que $a \,\mathcal{R}\, a$. Esto significa que la relación $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ es una relación reflexiva.

Si $a \,\mathcal{R}\, b$, entonces $\exists\, A_\alpha \in \{A_\alpha\}_{\alpha\in I} \mid a, b \in A_\alpha$, esto es, $b, a \in A_\alpha$, por lo que $b \,\mathcal{R}\, a$. Esto significa que la relación $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ es una relación simétrica.

Si $a \,\mathcal{R}\, b$ y $b \,\mathcal{R}\, c$, entonces $\exists\, A_\alpha \in \{A_\alpha\}_{\alpha\in I} \mid a, b \in A_\alpha$ y $\exists\, A_\beta \in \{A_\alpha\}_{\alpha\in I} \mid b, c \in A_\beta$. Puesto que $b \in A_\alpha \cap A_\beta \neq \varnothing$, entonces $\alpha = \beta$ y, por lo tanto, $a, c \in A_\alpha$. Esto significa que la relación $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ es una relación transitiva. ■

§ 10.1 Relaciones de Orden. Conjuntos Ordenados.

Si $\mathcal{R} \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ es una relación de orden parcial sobre un conjunto $\boldsymbol{A}$, es decir, una relación binaria que es reflexiva, antisimétrica y transitiva, se denota esta como $\precsim \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$. En este caso, en lugar de $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathcal{R}$, se escribe $\boldsymbol{a} \precsim \boldsymbol{b}$ y se dice que $\boldsymbol{a}$ es *anterior* (o *inferior*) a $\boldsymbol{b}$ y que $\boldsymbol{b}$ es *posterior* (o *superior*) a $\boldsymbol{a}$.

Si $\mathcal{R}^{-1} \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ es la *inversa de la relación de orden parcial* $\precsim \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{A}$, se escribe $\boldsymbol{a} \succsim \boldsymbol{b}$ en lugar de $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathcal{R}^{-1}$, Se tiene entonces

$$\boldsymbol{a} \succsim \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{b} \precsim \boldsymbol{a}$$

Conjunto Parcialmente Ordenado. Un conjunto $\boldsymbol{A}$ con un orden parcial $\precsim \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ se llama *conjunto parcialmente ordenado* y se denota como $(\boldsymbol{A}, \precsim)$, para indicar que está ordenado por la relación binaria $\precsim \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$, y el conjunto $\boldsymbol{A}$ con el orden inverso $\succsim \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ de $\precsim \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ (es decir, $\precsim^{-1} =: \succsim$) se denota entonces como $(\boldsymbol{A}, \succsim)$.

Si $\mathcal{R} \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ es una *relación de orden estricto* sobre un conjunto $\boldsymbol{A}$, es decir, una relación binaria que es asimétrica y transitiva, se denota esta como $\prec \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$. En este caso, en lugar de $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathcal{R}$, se escribe $\boldsymbol{a} \prec \boldsymbol{b}$ y se dice que $\boldsymbol{a}$ es *estrictamente anterior* (o *estrictamente inferior*) a $\boldsymbol{b}$ y que $\boldsymbol{b}$ es *posterior estrictamente* (o *estrictamente superior*) a $\boldsymbol{a}$.

Si $\mathcal{R}^{-1} \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ la *inversa de la relación de orden estricto* $\prec \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$, se escribe $\boldsymbol{a} \succ \boldsymbol{b}$ en lugar de $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathcal{R}^{-1}$. Se tiene entonces

$$\boldsymbol{a} \succ \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{b} \prec \boldsymbol{a}$$

Conjunto Estrictamente Ordenado. Un conjunto $\boldsymbol{A}$ con un orden estricto $\prec \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ se llama *conjunto estrictamente ordenado* y se denota como $(\boldsymbol{A}, \prec)$, para indicar que está ordenado por $\prec \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$, y el conjunto $\boldsymbol{A}$ con el orden inverso $\succ \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ de $\prec \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ (es decir, $\prec^{-1} =: \succ$) se denota entonces como $(\boldsymbol{A}, \succ)$.

Observación. Nótese que, si $\precsim \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ es una relación de orden parcial en $\boldsymbol{A}$, entonces la relación binaria $\prec \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ definida por: $\boldsymbol{a} \prec \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a} \precsim \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$ es una relación de orden estricto en $\boldsymbol{A}$. Recíprocamente, si $\prec \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ es una relación de orden estricto en $\boldsymbol{A}$, entonces la relación binaria $\precsim \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ definida por: $\boldsymbol{a} \precsim \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a} \prec \boldsymbol{b}$ ó $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ es una relación de orden parcial en $\boldsymbol{A}$.

Precedente y Siguiente. Si $\boldsymbol{a} \prec \boldsymbol{b}$ y no existe $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{A}$ tal que $\boldsymbol{a} \prec \boldsymbol{c} \prec \boldsymbol{b}$, entonces se dice que $\boldsymbol{a}$ *precede* a $\boldsymbol{b}$ ó que $\boldsymbol{a}$ es *precedente* de $\boldsymbol{b}$ y que $\boldsymbol{b}$ *sigue* a $\boldsymbol{a}$ ó que $\boldsymbol{b}$ es el *siguiente* de $\boldsymbol{a}$.

Los elementos $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{A}$ se dicen *comparables*, si, $\boldsymbol{a} \precsim \boldsymbol{b}$ ó $\boldsymbol{a} \succsim \boldsymbol{b}$. En caso contrario se dicen *no comparables*.

Sección inicial. Sea $(\boldsymbol{A}, \precsim)$ un conjunto ordenado. La *sección inicial* de un elemento $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ se define como el conjunto

$$s(\boldsymbol{a}) \coloneqq \{\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{x} \precsim \boldsymbol{a} \,\}.$$

Sección inicial abierta. Sea $(\boldsymbol{A}, \precsim)$ un conjunto ordenado. La *sección inicial abierta* de un elemento $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ se define como el conjunto

$$\mathring{s}(\boldsymbol{a}) \coloneqq \{\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{a} \,\}.$$

Primero y Último Elementos

Un elemento $a \in A$ es un primer elemento del conjunto ordenado $(A, \precsim)$, si

$$a \precsim x \quad \forall\, x \in A$$

Un elemento $b \in A$ es un último elemento del conjunto ordenado $(A, \precsim)$, si

$$x \precsim b \quad \forall\, x \in A$$

Maximal y Minimal

Un elemento $b \in A$ de un conjunto ordenado $(A, \precsim)$ se llama maximal ó máximo, si

$$b \precsim x \quad \Longrightarrow b = x$$

Un elemento $a \in A$ de un conjunto ordenado $(A, \precsim)$ se llama minimal o mínimo, si

$$x \precsim a \quad \Longrightarrow x = a$$

Se denotan el maximal y el minimal de A respectivamente como $\max(A)$ y $\min(A)$.

Observación. Un conjunto parcialmente ordenado puede tener varios elementos maximales que podrían ser no comparables, pero no puede tener más de un último elemento como lo demuestra el siguiente teorema.

Teorema 7.1. Sea $(A, \precsim)$ un conjunto parcialmente ordenado no puede tener más de un primer y un último elemento $a \in A$.

Demostración. Sean a y a' dos primeros elementos de A. Se tiene que $a \precsim a'$ puesto que a' es primer elemento. Además $a' \precsim a$ puesto que a es primer elemento. Pero $a = a'$ por la propiedad antisimétrica de la relación de orden parcial. Para el último elemento la demostración es análoga. ■

Mayorante y Minorante

Un elemento $b \in A$ de un conjunto ordenado $(A, \precsim)$ es un mayorante o cota superior de $B \subseteq A$, si

$$\forall\, x \in B \text{ es } x \precsim b$$

Un elemento $a \in A$ de un conjunto ordenado $(A, \precsim)$ es un minorante o cota inferior de $B \subseteq A$, si

$$\forall\, x \in B \text{ es } a \precsim x$$

Conjuntos Acotados y Conjuntos no Acotados

Si un conjunto tiene un mayorante se llama conjunto acotado superiormente, y si tiene un minorante se llama conjunto acotado inferiormente.

Un conjunto se llama acotado, si es acotado superior e inferiormente; en caso contrario se dice no acotado.

Extremo Supremo y Extremo Inferior

Un elemento $b \in A$ es un extremo superior ó supremo de B, si b es un mayorante de B y es anterior a todos los mayorantes de B y se le denota por ***sup*** (B).

Un elemento $a \in A$ es un extremo inferior ó ínfimo de B, si a es un minorante de B y es posterior a todos los minorantes de B y se le denota por ***inf*** (B).

Orden Inducido. Sea $(A, \precsim)$ un conjunto ordenado y $B \subseteq A$. Entonces $\precsim$ induce un orden $\mathcal{R}$ en B como sigue:

$$\forall\, a, b \in B \qquad (a, b) \in \mathcal{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (a, b) \in \precsim$$

Conjuntos Dirigidos. Un conjunto parcialmente ordenado $(A, \precsim)$ se llama dirigido hacia la derecha (ó ascendentemente), si

$$\forall\, a, b \in A \;\; \exists \;\; c \in A \;\middle|\; a \precsim c \text{ y } b \precsim c.$$

Un conjunto parcialmente ordenado $(A, \precsim)$ se llama dirigido hacia la izquierda (ó descendentemente), si

$$\forall\, a, b \in A \;\; \exists \;\; c \in A \;\middle|\; c \precsim a \text{ y } c \precsim b.$$

Observación. Algunos autores definen un conjunto dirigido como un conjunto A con una relación binaria de preorden $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ (reflexiva, transitiva) que cumple la propiedad de Moore E. y Smith H. Sin embargo, las relaciones binarias usadas en este libro $\{ \leq, \subseteq, \dots \}$ son antisimétricas, por lo que nosotros, como algunos otros autores, definimos un conjunto dirigido como un conjunto parcialmente ordenado que cumple la propiedad de Moore E. y Smith H.

De especial interés son, para la teoría de límites, aquellos conjuntos dirigidos sin último elemento. Un conjunto parcialmente ordenado $(A, \precsim)$ es un conjunto dirigido sin último elemento, si cumple la propiedad de Moore E. y Smith H.:

$$\forall\, a, b \in A \; \exists \; c \in A \;\middle|\; a \prec c \text{ y } b \prec c$$

Teorema 8.1. Sea $(A, \precsim)$ un conjunto dirigido. Sea b un elemento maximal de A. Entonces b es el último elemento de A.

Demostración. Como A es un conjunto dirigido, y como $b \in A$, entonces

$$\forall\, a, b \in A \; \exists \; c \in A \;\middle|\; a \precsim c \text{ y } b \precsim c.$$

Pero b es un elemento maximal de A y $b \precsim c$, lo que, por la definición de elemento maximal se tiene tanto $b = c$ es decir,

$$b \precsim c \;\Longrightarrow\; b = c$$

Se tiene entonces que $a \precsim b \;\; \forall\, a \in A$, es decir, b es el último elemento de A. ■

Llamaremos simplemente conjuntos dirigidos a los conjuntos dirigidos a la derecha sin último elemento. Las propiedades de los conjuntos dirigidos a la izquierda y a la derecha son análogas por lo que a los conjuntos dirigidos a la izquierda los mencionaremos como conjuntos dirigidos con el orden inverso. Los conjuntos dirigidos con último elemento no los utilizaremos.

Subconjunto Confinal. Un subconjunto $B \subseteq A$ de un conjunto dirigido (A, $\precsim$) se llama subconjunto confinal de A, si

$$\forall\ a \in A\ \ \exists\ \ b \in B \mid a \precsim b.$$

Teorema 9.1. Sea B subconjunto confinal de un conjunto dirigido (A, $\precsim$). Entonces (B, $\precsim$) con el orden inducido por A, es también un conjunto dirigido.

Demostración. Sean a y b dos elementos cualesquiera de B. Entonces a, $b \in A$ puesto que $B \subseteq A$. Además, (A, $\precsim$) es un conjunto dirigido por lo que $\exists\ \ c \in A \mid a \precsim c$ y $b \precsim c$. Pero $B \subseteq A$ es un subconjunto confinal de A, por lo cual $\exists\ \ d \in B \mid c \precsim d$. Se tiene entonces que

$$\forall\ a, b \in B\ \ \exists\ d \in A \mid a \precsim d \text{ y } b \precsim d.$$

Luego, B es un conjunto dirigido. ■

Teorema 10.1. Sea (A, $\precsim$) un conjunto dirigido y sea B subconjunto confinal de A (con el orden inducido por A). Supongamos que (B, $\precsim$) tiene un elemento maximal $m = max\ (B)$. Entonces (A, $\precsim$) tiene un elemento maximal y $m = max\ (A)$.

Demostración. Como $m \in B$ y $B \subseteq A$, entonces $m \in A$. Supongamos que A no tiene elemento maximal. Como (A, $\precsim$) es un conjunto dirigido sin último elemento, entonces $\forall\ a \in A$ $\exists\ d \in A \mid a \prec d$ y $m \prec d$. Como B es un subconjunto confinal A, entonces $\exists\ b \in B \mid d \precsim b$, es decir $b \in B$ y $m \prec b$. lo que contradice que $m \in B$ sea un elemento maximal de B. Esto demuestra que (A, $\precsim$) tiene un elemento maximal $M = max\ (A)$. Falta demostrar que $m = M$.

Como $M = max\ (A)$, por el teorema 8.1 M es el último elemento de A y como $m \in A$, entonces m y M son comparables y la desigualdad $M \precnsim m$ implica $m = M$. Supongamos ahora que $m \precsim M$. Entonces $\exists\ b \in B \mid M \precsim b$, puesto que B es un subconjunto confinal A, pero $b \in B$ y $m \precnsim b$ implica $m = b$ porque $m = max\ (B)$. Además, la desigualdad $M \precnsim b = m$ implica $M = m$ puesto que M es un elemento maximal de A. En cualquier caso $m = M$. ■

Orden Total. Un orden total en un conjunto A es un orden parcial $\precsim\ \subseteq A \times A$ que además cumple la siguiente propiedad:

1) **Ley de tricotomía**: $\forall\ a, b \in A$ se cumple una, y sólo una de las siguientes relaciones:

$$a \prec b\ \text{ ó } a = b \text{ ó }\ b \succ a.$$

Obviamente, la ley de tricotomía puede enunciarse de la siguiente forma:

$\forall\ a, b \in A$ se cumple una de las siguientes relaciones:

$$a \precsim b\ \text{ ó }\ b \succsim a.$$

Entonces un orden total en un conjunto A es un orden parcial $\precsim\ \subseteq A \times A$ en el cual todos los elementos del conjunto A son comparables.

Relación de orden lineal. Una relación de orden estricto $\prec \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ sobre un conjunto $\boldsymbol{A}$ es una relación de orden lineal (misma que se denota como $\prec$), si cumple la ley de tricotomía:

$\forall\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{A}$ se cumple una, y sólo una de las siguientes relaciones:

$$\boldsymbol{a} \prec \boldsymbol{b} \text{ ó } \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \text{ ó } \boldsymbol{b} \succ \boldsymbol{a}.$$

Para la teoría de límites el concepto de conjunto parcialmente ordenado resulta demasiado débil. En cambio, concepto de conjunto totalmente ordenado resulta, demasiado fuerte. El concepto adecuado es el de conjunto dirigido.

Red ó Sucesión Generalizada. Un mapeo $f\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ cuyo dominio de definición $(\boldsymbol{A}, \precsim)$ es un conjunto dirigido, se llama red ó sucesión generalizada del conjunto $\boldsymbol{B}$.

Intervalos acotados. Sea $(\boldsymbol{A}, \precsim)$ un conjunto totalmente ordenado. Dos elementos $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{A}$, tales que $\boldsymbol{a} \precsim \boldsymbol{b}$, definen los siguientes subconjuntos de $\boldsymbol{A}$ llamados intervalos:

1) El conjunto $[\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\,] \coloneqq \{\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{a} \precsim \boldsymbol{x} \precsim \boldsymbol{b}\, \}$ se llama intervalo cerrado ó segmento;
2) el conjunto $]\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\, [\coloneqq \{\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{a} \prec \boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{b}\, \}$ se llama intervalo abierto;
3) el conjunto $[\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\, [\coloneqq \{\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{a} \precsim \boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{b}\, \}$ se llama intervalo cerrado-abierto;
4) el conjunto $]\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\,] \coloneqq \{\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{a} \prec \boldsymbol{x} \precsim \boldsymbol{b}\, \}$ se llama intervalo abierto-cerrado;

Intervalos no acotados. Si $(\boldsymbol{A}, \precsim)$ no es acotado superiormente, se definen los siguientes conjuntos:

1) el conjunto $[\, \boldsymbol{a}, +\infty\, [\coloneqq \{\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{a} \precsim \boldsymbol{x}\, \}$ se llama intervalo no acotado cerrado;
2) el conjunto $]\, \boldsymbol{a}, +\infty\, [\coloneqq \{\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{a} \prec \boldsymbol{x}\, \}$ se llama intervalo no acotado abierto;

y, si $(\boldsymbol{A}, \precsim)$ no es acotado inferiormente, se definen los siguientes conjuntos:

3) el conjunto $]\, -\infty, \boldsymbol{b}\, [\coloneqq \{\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{b}\, \}$ se llama intervalo no acotado abierto; y
4) el conjunto $]\, -\infty, \boldsymbol{b}\,] \coloneqq \{\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{x} \precsim \boldsymbol{b}\, \}$ se llama intervalo no acotado cerrado.

Los elementos $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ son llamados respectivamente extremo inferior y superior cada intervalo.

Conjuntos isomorfos. Los conjuntos ordenados $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ se llaman isomorfos, lo que se denota como $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$, si existe un mapeo biyectivo $f\colon \boldsymbol{A} \rightleftarrows \boldsymbol{B}$ (llamado isomorfismo), que preserva el orden, es decir,

$$\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B} \iff (\,\exists\ f\colon \boldsymbol{A} \rightleftarrows \boldsymbol{B} \mid \forall\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{a} \precsim \boldsymbol{b} \iff f(\boldsymbol{a}) \precsim f(\boldsymbol{b}))$$

Se puede comprobar que la relación de isomorfismo de conjuntos es una relación de equivalencia.

Teorema 11.1. Sea $(\boldsymbol{A}, \precsim)$ un conjunto ordenado y sea $s(\boldsymbol{A}) \coloneqq \{\, s(\boldsymbol{a}) \mid \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}\, \}$ la familia de todas las secciones iniciales $s(\boldsymbol{a}) = \{\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{x} \precsim \boldsymbol{a}\, \}$ de los elementos de $\boldsymbol{A}$ ordenada por inclusión. Entonces $(s(\boldsymbol{A}), \subseteq)$ es isomorfa a $(\boldsymbol{A}, \precsim)$, es decir,

$$(s(\boldsymbol{A}), \subseteq) \simeq (\boldsymbol{A}, \precsim)$$

Demostración. Defínase el mapeo $f\colon (\boldsymbol{A}, \precsim) \to (s(\boldsymbol{A}), \subseteq)$ por la igualdad $f(\boldsymbol{a}) \coloneqq s(\boldsymbol{a})$. Para $\boldsymbol{a} \precsim \boldsymbol{b}$ se tiene que $\boldsymbol{x} \precsim \boldsymbol{a}$ implica $\boldsymbol{x} \precsim \boldsymbol{b}$, y por lo tanto $s(\boldsymbol{a}) \subseteq s(\boldsymbol{b})$.

Ahora bien, si $s(\boldsymbol{a}) \subseteq s(\boldsymbol{b})$, entonces $\boldsymbol{x} \in s(\boldsymbol{a})$ implica $\boldsymbol{x} \in s(\boldsymbol{b})$ y por lo tanto $\boldsymbol{a} \precsim \boldsymbol{b}$, es decir, f es un mapeo que preserva el orden.

Por definición f es sobreyectivo. Si $\boldsymbol{a} \prec \boldsymbol{b}$, entonces $\boldsymbol{b} \in s(\boldsymbol{b})$ y $\boldsymbol{b} \notin s(\boldsymbol{a})$, esto es, $s(\boldsymbol{a}) \subset s(\boldsymbol{b})$, pero $s(\boldsymbol{a}) \neq s(\boldsymbol{b})$, lo que significa que f es inyectivo. Se tiene entonces que f es inyectivo y sobreyectivo, f es un mapeo biyectivo que preserva el orden, es decir f es un isomorfismo. ■

Crecimiento y Decrecimiento de Mapeos. Sean $(\boldsymbol{A}, \precsim)$ y $(\boldsymbol{B}, \precsim)$ conjuntos parcialmente ordenados y sea $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{A}$, un subconjunto totalmente ordenado con el orden inducido del conjunto $\boldsymbol{A}$. Entonces el mapeo $f\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, definido en $\boldsymbol{A}$, se llama

a) creciente en $\boldsymbol{C}$, si $\forall\ \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{C},\ \boldsymbol{x}_1 \prec \boldsymbol{x}_2 \implies f(\boldsymbol{x}_1) \precsim f(\boldsymbol{x}_2)$;
b) decreciente en $\boldsymbol{C}$, si $\forall\ \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{C},\ \boldsymbol{x}_1 \prec \boldsymbol{x}_2 \implies f(\boldsymbol{x}_1) \succsim f(\boldsymbol{x}_2)$;
c) estrictamente creciente en $\boldsymbol{C}$, si $\forall\ \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{C},\ \boldsymbol{x}_1 \prec \boldsymbol{x}_2 \implies f(\boldsymbol{x}_1) \prec f(\boldsymbol{x}_2)$;
d) estrictamente decreciente en $\boldsymbol{C}$, si $\forall\ \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{C},\ \boldsymbol{x}_1 \prec \boldsymbol{x}_2 \implies f(\boldsymbol{x}_1) \succ f(\boldsymbol{x}_2)$.

Un mapeo que es creciente ó decreciente en un conjunto $\boldsymbol{C}$; se llama monótono en $\boldsymbol{C}$. Un mapeo que es estrictamente creciente ó estrictamente decreciente en un conjunto $\boldsymbol{C}$; se llama estrictamente monótono en $\boldsymbol{C}$.

§ 11.1 FAMILIAS DE CONJUNTOS

Cuerpo. Sea $\boldsymbol{A}$ un conjunto cualquiera. Sea $\sigma = \{\boldsymbol{S}_\alpha\}_{\alpha\in \mathrm{I}}$ cualquier familia de subconjuntos de $\boldsymbol{A}$. La unión $\widetilde{\sigma} := \bigcup_{\alpha\in \mathrm{I}} \boldsymbol{S}_\alpha$ de todos los conjuntos $\boldsymbol{S}_\alpha \in \sigma$ se llama cuerpo de la familia σ.

De la definición de cuerpo se sigue inmediatamente que $\widetilde{\sigma} \subseteq \boldsymbol{A}$.

Estrella. Sea $\boldsymbol{A}$ un conjunto cualquiera. Sea $\boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{A}$ cualquier subconjunto de $\boldsymbol{A}$. Denotemos como $\sigma_{\boldsymbol{E}}$ a la subfamilia de todos los elementos de $\sigma = \{\boldsymbol{S}_\alpha\}_{\alpha\in \mathrm{I}}$ que se interceptan con $\boldsymbol{E}$, es decir, sea $\sigma_{\boldsymbol{E}} := \{\, \boldsymbol{S}_\alpha \in \sigma \mid \boldsymbol{S}_\alpha \cap \boldsymbol{E} \neq \varnothing\}$. El cuerpo $\widetilde{\sigma}_{\boldsymbol{E}}$ de la familia $\sigma_{\boldsymbol{E}}$ se llama estrella del conjunto $\boldsymbol{E}$, con relación a la familia σ.

De la definición de cuerpo se sigue inmediatamente que si $\boldsymbol{E}= \{\boldsymbol{a}\}$, $\widetilde{\sigma}_{\boldsymbol{E}}$ se escribe como $\widetilde{\sigma}_{\boldsymbol{a}}$ y se denomina estrella de $\boldsymbol{a}$ con relación a la familia σ. En este caso $\widetilde{\sigma}_{\boldsymbol{a}} \neq \varnothing$, si $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A} - \widetilde{\sigma}$.

Toda familia $\sigma = \{\boldsymbol{S}_\alpha\}_{\alpha\in \mathrm{I}}$ define una familia $\sigma^* := \{\widetilde{\sigma}_{\boldsymbol{a}}\}_{\boldsymbol{a}\in \boldsymbol{A}}$ de las estrellas de todos los elementos de $\boldsymbol{A}$, con relación a σ. Nótese que $\widetilde{\sigma} = \widetilde{\sigma}^*$.

Cubierta y Subcubierta. Una familia de conjuntos $\sigma = \{\boldsymbol{S}_\alpha\}_{\alpha\in \mathrm{I}}$ se llama cubierta de un conjunto $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{A}$, si $\boldsymbol{S} \subseteq \widetilde{\sigma}$. Frecuentemente se estudia la cubierta de todo el conjunto $\boldsymbol{A}$, es decir, la familia de conjuntos $\sigma = \{\boldsymbol{S}_\alpha\}_{\alpha\in \mathrm{I}}$ para la cual $\widetilde{\sigma} = \boldsymbol{A}$. En este caso cualquier subfamilia $\sigma_0 \subseteq \sigma$ para la cual $\widetilde{\sigma}_0 = \boldsymbol{A}$, se llama subcubierta de la cubierta σ de $\boldsymbol{A}$.

Sean $\sigma = \{\boldsymbol{S}_\alpha\}_{\alpha\in \mathrm{I}}$ y $\tau = \{\boldsymbol{T}_\beta\}_{\beta\in \mathrm{J}}$ dos familias de subconjuntos de un mismo conjunto $\boldsymbol{A}$. Se dice que σ está insertado en τ, lo que se escribe como $\sigma \succ \tau$, si todo conjunto $\boldsymbol{S}_\alpha \in \sigma$ es subconjunto de algún conjunto $\boldsymbol{T}_\beta \in \tau$, es decir,

$$\sigma \succ \tau \iff \forall\, \boldsymbol{S}_\alpha \in \sigma\ \exists\, \boldsymbol{T}_\beta \in \tau \mid \boldsymbol{S}_\alpha \subseteq \boldsymbol{T}_\beta.$$

En particular, σ está insertado en τ, si σ es una subcubierta de la cubierta τ de $\boldsymbol{A}$.

Anillo. Una familia no vacía de conjuntos $\sigma = \{\boldsymbol{S}_\alpha\}_{\alpha\in \mathrm{I}}$ forma un anillo, si

$$\boldsymbol{S}_\alpha, \boldsymbol{S}_\beta \in \sigma \implies (\, \boldsymbol{S}_\alpha \triangle \boldsymbol{S}_\beta \in \sigma \ \wedge\ \boldsymbol{S}_\alpha \cap \boldsymbol{S}_\beta \in \sigma\,).$$

De la definición de anillo se sigue inmediatamente que, si σ es un anillo, entonces $\forall\, \boldsymbol{S}_\alpha, \boldsymbol{S}_\beta \in \sigma$ se tiene $\boldsymbol{S}_\alpha \cup \boldsymbol{S}_\beta = (\boldsymbol{S}_\alpha \triangle \boldsymbol{S}_\beta) \triangle (\boldsymbol{S}_\alpha \cap \boldsymbol{S}_\beta) \in \sigma$ y $\boldsymbol{S}_\alpha - \boldsymbol{S}_\beta = \boldsymbol{S}_\alpha \triangle (\boldsymbol{S}_\alpha \cap \boldsymbol{S}_\beta) \in \sigma$.

Semianillo. Una familia no vacía de conjuntos $\sigma = \{\boldsymbol{S}_\alpha\}_{\alpha\in \mathrm{I}}$ forma un semianillo, si

1) $\varnothing \in \sigma$.
2) σ es cerrado con respecto a la intersección.
3) $\forall\, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}_1 \in \sigma \mid \boldsymbol{S}_1 \subseteq \boldsymbol{S}\ \ \exists\, \boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \ldots, \boldsymbol{S}_{\mathrm{n}} \in \sigma \mid \boldsymbol{S} = \bigcup_{\alpha=1}^{\mathrm{n}} \boldsymbol{S}_\alpha$.

De la definición de semianillo se sigue inmediatamente que un anillo siempre es un semianillo, puesto que si $S_\alpha \subseteq S$, entonces $S = S_\alpha \cup (S - S_\alpha) \in \sigma$.

La totalidad de los intervalos $[\,a, b\,]$, $]\,a, b\,[$, $[\,a, b\,[$ y $]\,a, b\,]$ $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \mid a \leq b$; forman un semianillo que no es un anillo.

Unidad. El conjunto $E \in \sigma$ se llama unidad de la familia de conjuntos $\sigma = \{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$, si

$$\forall\, S_\alpha \in \sigma \qquad S_\alpha \cap E = S_\alpha.$$

Álgebra de Conjuntos. Un anillo $\sigma = \{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ con unidad $E \in \sigma$ se llama álgebra de conjuntos.

Topología. Sea A un conjunto no vacío cualquiera. Una familia no vacía $\tau \subseteq 2^A$ de subconjuntos S_α de A forma una topología de A, si

1) La unión $\bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$ de cualquier subfamilia $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de elementos de τ es así mismo un elemento de τ, es decir, $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \tau \implies \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha \in \tau$.

2) La intersección $\bigcap_{\alpha=1}^{n} S_\alpha$ de cualquier subfamilia finita $\{S_\alpha\}_{\alpha=1}^{n}$ de elementos de τ es así mismo un elemento de τ, es decir, $\{S_\alpha\}_{\alpha=1}^{n} \subseteq \tau \implies \bigcap_{\alpha=1}^{n} S_\alpha \in \tau$.

Los elementos de τ se llaman conjuntos abiertos por lo que se puede decir que la unión de cualquier sistema de conjuntos abiertos es abierta y la intersección de cualquier sistema finito de conjuntos abiertos es abierta.

De 1) se deduce que $\varnothing \in \tau$ como la unión de un sistema vacío de conjuntos abiertos.

De 1) se deduce que $A \in \tau$ como la intersección de un sistema vacío de conjuntos abiertos.

Ejemplos:

a) Para cualquier conjunto A el conjunto $\{A, \varnothing\}$ forma un álgebra de conjuntos cuya unidad es el conjunto $E = A$.

b) Para cualquier conjunto A el conjunto potencia 2^A forma un álgebra de conjuntos cuya unidad es el conjunto $E = A$.

c) La familia $\sigma = \{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de todos los subconjuntos finitos S_α de un conjunto arbitrario A forma un anillo de conjuntos. Este anillo formará un álgebra de conjuntos si, y sólo si A es un conjunto finito.

d) La familia de todos los conjuntos acotados de la recta real es un anillo de conjuntos.

e) Para cualquier conjunto no vacío A la familia $\{A, \varnothing\}$ forma una topología de A, llamada topología antidiscreta o indiscreta.

f) Para cualquier conjunto no vacío A el conjunto potencia 2^A forma una topología de A, llamada topología discreta.

§ 12.1 NÚMEROS CARDINALES

Definición 15.1. El conjunto $\boldsymbol{A}$ es equipotente al conjunto $\boldsymbol{B}$, lo que se denota como $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, si existe un mapeo biyectivo f: $\boldsymbol{A} \rightleftarrows \boldsymbol{B}$.

Si por el contrario, el conjunto $\boldsymbol{A}$ es no equipotente al conjunto $\boldsymbol{B}$, entonces se escribe

$$\boldsymbol{A} \nsim \boldsymbol{B}$$

***Teorema 12.1*. ** La relación $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$ es una relación de equivalencia.

***Demostración*.** Se deduce de el hecho que el mapeo identidad es un mapeo biyectivo, el inverso de un mapeo biyectivo es un mapeo biyectivo, y la composición de mapeos biyectivos es un mapeo biyectivo. ■

Por el teorema fundamental de las relaciones de equivalencia, se tiene que la relación $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$ define una partición de los conjuntos en clases de equivalencia. La clase de equivalencia a la cual pertenece un conjunto $\boldsymbol{A}$ se denota por $\#(\boldsymbol{A})$ y se llama cardinalidad del conjunto $\boldsymbol{A}$.

Se dice que dos conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ tienen "la misma cantidad de elementos" ó que tienen la misma cardinalidad, si pertenecen a la misma clase de equivalencia.

De lo anterior de deduce que dos conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son equipotentes si, y sólo si tienen la misma cardinalidad, es decir,

$$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B} \iff \#(\boldsymbol{A}) = \#(\boldsymbol{B})$$

Teorema 13.1. Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son conjuntos ordenados isomorfos, entonces son equipotentes, es decir,

$$\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B} \implies \boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$$

Demostración. Se deduce de que, si $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$, entonces existe un mapeo biyectivo f: $\boldsymbol{A} \rightleftarrows \boldsymbol{B}$ que preserva el orden. Por definición de conjuntos equipotentes, la existencia de este mapeo f nos garantiza que $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$. ■

Definición 16.1. Un conjunto que es equipotente a uno de sus subconjuntos propios, se llama conjunto infinito, y en caso contrario se llama finito.

La cardinalidad $\#(\mathbb{N})$ del conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ de los números naturales se denota como $\aleph_0$, es decir,

$$\#(\mathbb{N}) =: \aleph_0$$

Multiplicidad de una Familia de Conjuntos. La multiplicidad $\mathrm{mul}_{\boldsymbol{a}}\sigma$ de una familia de conjuntos $\sigma = \{\boldsymbol{S}_\alpha\}_{\alpha\in \mathrm{I}}$ en un elemento dado $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$, es la cardinalidad de la subfamilia σ_0 de $\sigma = \{\boldsymbol{S}_\alpha\}_{\alpha\in \mathrm{I}}$, cuyos conjuntos contienen al elemento $\boldsymbol{a}$, es decir,

$$\mathrm{mul}_{\boldsymbol{a}}\sigma := \{\, \boldsymbol{S}_\alpha \in \sigma \;\big|\; \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{S}_\alpha \,\}$$

§ 13.1 CONJUNTOS CONTABLES

Conjuntos contadores. La sección inicial $s(n) \coloneqq \{ x \in \mathbb{N} \mid x \leq n \}$ de un elemento $n \in \mathbb{N}$, con el orden natural $\leq$, es decir, el conjunto

$$s(n) \coloneqq \{ x \in \mathbb{N} \mid x \leq n \} = \{1, 2, 3, \ldots, n \}$$

se llama conjunto contador de cardinalidad n.

El conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ de los números naturales se llama conjunto contador de cardinalidad $\aleph_0$.

Definición 17.1. Un conjunto A se llama numerable o contable si es equipotente a un subconjunto del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales.

Nótese que un conjunto es contable si es equipotente a algún conjunto contador.

Como se verá en seguida, el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros y el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales son contables y tienen cardinalidad $\aleph_0$.

Teorema 14.1. El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es equipotente al conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, es decir, $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$.

Demostración**.** Sea $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ el mapeo definido por la igualdad

$$f(z) \coloneqq \begin{cases} 2z; & \text{si } z > 0 \\ 1\text{-}2z; & \text{si } z \leq 0 \end{cases}$$

El mapeo así definido es biyectivo, por lo que $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$.

Teorema 15.1. El conjunto producto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es un conjunto contable.

Demostración**.** Sea $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ el mapeo definido por la igualdad

$$f((m, n)) \coloneqq \frac{(m + n - 2)\,(m + n - 1)}{2} + n$$

Comprobemos que el mapeo así definido es biyectivo, por lo que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

$m+n-1$ es la longitud de la línea del elemento (m, n) (llamada línea $m+n-1$).
$f(m+n-1, 1)$ es el primer elemento de la línea $m+n-1$ y su predecesor es $f(1, m+n-2)$.
$f(1, m+n-1)$ es el último elemento de la línea $m+n-1$ y su siguiente es $f(m+n, 1)$.

Propiedades del mapeo f:

1) $f(m-r, n+r) = f(m, n) + r$;
2) $f(m+r, n-r) = f(m, n) - r$;
3) $f(m, n+r) = f(m+r, n) + r$;
4) $f(n, m) = f(m, n) + m - n$

Primero demostremos que f es un mapeo sobreyectivo. De las propiedades 1) y 2) se sigue que

1) $f(m, n) + 1 = f(m-1, n+1)$;
2) $f(m, n) - 1 = f(m+1, n-1)$ y
3) $f(1, m+n-1) + 1 = f(m+n, 1)$.

Lo que demuestra que f es un mapeo sobreyectivo ya que el conjunto de imágenes abarca a todos los números naturales ($f(1, 1) = 1$ y cada $f(m, n)$ tiene un siguiente).

Demostremos ahora que f es un mapeo inyectivo. Supongamos $(m, n) \neq (m', n')$. Sumpongamos primeramente que se cumple la igualdad $m+n = m'+n'$. En este caso $n \neq n'$ y, por lo tanto,

$$f(m, n) = \frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2} + n \neq \frac{(m'+n'-2)(m'+n'-1)}{2} + n' = f(m', n').$$

Supongamos ahora que $m+n < m'+n'$. Entonces

$$f(m, n) = \frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2} + n \leq \frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2} + m + n - 1 = \frac{(m+n-1)(m+n)}{2} \leq$$
$$\leq \frac{(m'+n'-2)(m'+n'-1)}{2} < \frac{(m'+n'-2)(m'+n'-1)}{2} + n' = f(m', n').$$

Así, si $m+n < m'+n'$, entonces $f(m, n) \leq f(1, m+n-1) < f(m+n, 1) < f(m'+n', 1) \leq f(m', n')$.

Por lo tanto $(m, n) \neq (m', n') \Longrightarrow f(m, n) \neq f(m', n')$, es decir, que f es un mapeo inyectivo.

El f mapeo es inyectivo y sobreyectivo, es decir, f es un mapeo biyectivo y por lo que queda demostrado que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$. ■

Teorema 16.1. Todo conjunto infinito A contiene algún subconjunto contable $B \subseteq A$.

Demostración. Sea $f\colon 2^A \to A$ un mapeo de elección, definido de la siguiente manera:

$a_1 \coloneqq f(A)$
$a_2 \coloneqq f(A - \{a_1\})$
$a_3 \coloneqq f(A - \{a_1, a_2\})$
……………………………
$a_n \coloneqq f(A - \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}\})$
………………………………………

A es un conjunto infinito, por lo que $A - \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}\} \neq \varnothing\ \forall n \in \mathbb{N}$. f es un mapeo de elección, por lo que $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$, por lo tanto $B = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$ es un conjunto contable. ■

Teorema 17.1. Todo subconjunto de un conjunto contable es un conjunto contable (finito ó infinito).

Demostración. Sea A un conjunto contable y $B \subseteq A$. Si el conjunto A es finito, entonces $B \subseteq A$ también es finito y por lo tanto contable. Supongamos que A es un conjunto contable infinito. Entonces existe un mapeo biyectivo el mapeo $f\colon \mathbb{N} \rightleftarrows A$ entre A y un conjunto el $\mathbb{N}$, tal que $f(n) \eqqcolon a_n$. Se tiene entonces $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$.

Si $B = \varnothing$, entonces B es finito y por lo tanto contable. Sea $B \neq \varnothing$ y a_{n_1} el primer elemento de A tal que $a_{n_1} \in B$. Sea a_{n_2} el primer elemento de $A - \{a_{n_1}\}$ tal que $a_{n_2} \in B$. Sea a_{n_3} el primer elemento de $A - \{a_{n_1}, a_{n_2}\}$ tal que $a_{n_3} \in B$, … , etc. Se obtiene $B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots\}$.

El conjunto $\{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$ es contable y equipotente a B, por lo que B es contable. ■

Teorema 18.1. Sea $\sigma = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia contable de conjuntos contables. La unión (el cuerpo) $A \coloneqq \widetilde{\sigma} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es un conjunto contable. En este caso es evidente que si al menos uno de los conjuntos A_n es infinito, entonces el cuerpo $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es un conjunto infinito.

Demostración. Supongamos que los conjuntos A_α son disjuntos dos a dos, es decir, $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$. Sean $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{in}, \ldots\}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Es decir, sean $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots\}$; $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots\}$; $A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots\}$; … ; $A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots, a_{nn}, \ldots\}$; … etc. Como en el teorema 15.1, el mapeo $f\colon A \to \mathbb{N}$ definido por la igualdad $f(a_{mn}) \coloneqq \dfrac{(m+n-2)\,(m+n-1)}{2} + n$ es biyectivo por lo que la unión $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ se puede representar como un conjunto contable de la siguiente manera:

$$A = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \ldots, a_{1n}, a_{2\,n-1}, \ldots, a_{n-1\,2}, a_{n1}, \ldots\}. \blacksquare$$

Corolario . El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es contable como la unión contable de conjuntos contables.

§ 14.1 CONJUNTOS NO CONTABLES

Teorema 19.1. Los siguientes conjuntos son equipotentes al conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales: [0, 1] ;]0, 1[; [0, 1[y]0, 1], es decir $[0, 1] \sim]0, 1[\sim [0, 1[\sim]0, 1] \sim \mathbb{R}$.

Demostración. Como el mapeo $f:]0, 1[\to \mathbb{R}$ definido por la igualdad

$$f(x) := \tan\frac{\pi}{2}(2x - 1)$$

es biyectivo, se tiene que $]0, 1[\sim \mathbb{R}$.

Demostremos ahora solamente que $[0, 1] \sim]0, 1[$. Lo demás se demuestra análogamente.

Sea $A :=]0, 1[- \{1/2, 1/3, \ldots\}$. Se tiene entonces

$[0, 1] = \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots\} \cup A$ $\qquad$ $]0, 1[= \{1/2, 1/3, \ldots\} \cup A$
$[0, 1[= \{0, 1/2, 1/3, \ldots\} \cup A$ $\qquad$ $]0, 1] = \{1, 1/2, 1/3, \ldots\} \cup A$

Defínase el mapeo $f: [0, 1] \to]0, 1[$ mediante la igualdad:

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & \text{si } x = 0;1 \\[2mm] \dfrac{1}{n+2} & \text{si } x = 1/n \in \{1/2; 1/3; \ldots\} \\[2mm] x & \text{si } x \in A \end{cases}$$

El mapeo así definido es biyectivo, por lo que $[0, 1] \sim]0, 1[$. ■

Teorema 20.1. El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales no es contable, es decir, $\mathbb{R} \nsim \mathbb{N}$.

*Demostración***.** Para demostrar entonces la proposición, basta demostrar que el segmento [0, 1] no es contable.

Supongamos lo contrario, es decir, que existe un mapeo biyectivo $f: \mathbb{N} \rightleftarrows [0, 1]$, es decir que de alguna forma los elementos del conjunto [0, 1] se pueden enumerar escribiéndolos como una sucesión $A := \{r_1; r_2; r_3; \ldots\}$.

Cada elemento r_i de A se puede escribir en notación decimal con infinitas cifras, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccl} 1 & \leftrightarrow & r_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots a_{1n}\cdots \\ 2 & \leftrightarrow & r_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots a_{2n}\cdots \\ 3 & \leftrightarrow & r_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots a_{3n}\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \leftrightarrow & r_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots a_{nn}\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

en donde $a_{ij} \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$.

Defínase el elemento $\boldsymbol{r} \coloneqq 0.\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3\cdots\,\boldsymbol{b}_n\cdots$ en donde $\boldsymbol{b}_1 \neq \boldsymbol{a}_{11}$, $\boldsymbol{b}_2 \neq \boldsymbol{a}_{22}$, , …, $\boldsymbol{b}_n \neq \boldsymbol{a}_{nn}$, ⋯, y $\boldsymbol{b}_i \neq 0$ y $\boldsymbol{b}_i \neq 9$, para cualquier i.

Entonces $\boldsymbol{r} \in \,]0, 1[$ y sin embargo $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}_1$ porque $\boldsymbol{b}_1 \neq \boldsymbol{a}_{11}$, $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}_2$ porque $\boldsymbol{b}_2 \neq \boldsymbol{a}_{22}$, $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}_3$ porque $\boldsymbol{b}_3 \neq \boldsymbol{a}_{33}$, ⋯, $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}_n$ porque $\boldsymbol{b}_n \neq \boldsymbol{a}_{nn}$, ⋯, etc. Lo que demuestra que el conjunto [0, 1] no es contable. ■

Se puede demostrar también que el conjunto [0, 1] no es contable, utilizando teorema de Cantor que dice que si se tiene una sucesión de segmentos (intervalos cerrados) encajados $[0, 1] \supseteq \boldsymbol{I}_1 \supseteq \boldsymbol{I}_2 \supseteq \cdots \supseteq \boldsymbol{I}_n \supseteq \cdots$, existe un número real que pertenece a todos los segmentos.

Por reducción al absurdo, supongamos que todos los números reales del segmento [0, 1], se pueden enumerar escribiéndolos como una sucesión $\boldsymbol{A} \coloneqq \{\boldsymbol{r}_1; \boldsymbol{r}_2; \boldsymbol{r}_3; \ldots\}$.

Al segmento [0, 1] denótesele como $\boldsymbol{I}_0 \coloneqq [\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{b}_0]$, en donde $\boldsymbol{a}_0 = 0$ y $\boldsymbol{b}_0 = 1$. Divídase el segmento $\boldsymbol{I}_0 = [0, 1]$ en tres partes iguales [0, 1/3], [1/3, 2/3] y [2/3, 1].

Denótese al segmento que no contiene al elemento $\boldsymbol{r}_1$ como $\boldsymbol{I}_1 = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1]$, es decir, $\boldsymbol{r}_1 \notin \boldsymbol{I}_1$ y divídase en tres partes iguales $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1+1/9]$, $[\boldsymbol{a}_1+1/9, \boldsymbol{b}_1 - 1/9]$ y $[\boldsymbol{b}_1-1/9, \boldsymbol{b}_1]$.

Denótese al segmento que no contiene al elemento $\boldsymbol{r}_2$ como $\boldsymbol{I}_2 = [\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2]$, es decir, $\boldsymbol{r}_2 \notin \boldsymbol{I}_2$, ... Continuando el proceso, se obtiene una sucesión de segmentos encajados

$$\boldsymbol{I}_0 \supseteq \boldsymbol{I}_1 \supseteq \boldsymbol{I}_2 \supseteq \boldsymbol{I}_3 \supseteq \cdots \supseteq \boldsymbol{I}_n \supseteq \cdots,$$

para los cuales $\boldsymbol{r}_1 \notin \boldsymbol{I}_1$, $\boldsymbol{r}_2 \notin \boldsymbol{I}_2$, …, $\boldsymbol{r}_n \notin \boldsymbol{I}_n$, ⋯, y $|\,\boldsymbol{I}_n\,| = \dfrac{\boldsymbol{b}_n - \boldsymbol{a}_n}{2^n}$ tiende a hacerse 0, cuando $\boldsymbol{n}$ crece indefinidamente.

Por el teorema de Cantor, existe entonces un número real $\boldsymbol{c}$ que pertenece a todos los segmentos $\boldsymbol{I}_n$, es decir, $\exists\ \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{I}_n\ \ \forall\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$. Nótese que $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{A}$, lo que significa que $\exists\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ para el cual $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{r}_n$. Sin embargo $\boldsymbol{r}_n \notin \boldsymbol{I}_n$, lo que contradice el hecho de que $\boldsymbol{c}$ pertenezca a todos los segmentos $\boldsymbol{I}_n$. Así que el conjunto [0, 1] no es contable. ■

La cardinalidad $\#(\mathbb{R})$.del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se denota como $\boldsymbol{c}$, es decir,

$$\#(\mathbb{R}) \eqqcolon \boldsymbol{c}.$$

§ 15.1 Comparación de Cardinales

Definición 18.1. Si $\boldsymbol{A}$ es equipotente a un subconjunto de $\boldsymbol{B}$, es decir, si existe un mapeo inyectivo $f\colon \boldsymbol{A} \rightrightarrows \boldsymbol{B}$, entonces se dice que $\boldsymbol{A}$ es *anterior* a $\boldsymbol{B}$, lo que se escribe como

$$\boldsymbol{A} \precsim \boldsymbol{B} \quad (\text{ó } \boldsymbol{B} \succsim \boldsymbol{A})$$

y se dice que la cardinalidad del conjunto $\boldsymbol{A}$ es menor o igual a la cardinalidad del conjunto $\boldsymbol{B}$, lo que se escribe como $\#(\boldsymbol{A}) \le \#(\boldsymbol{B})$, es decir,

$$\boldsymbol{A} \precsim \boldsymbol{B} \iff \#(\boldsymbol{A}) \le \#(\boldsymbol{B})$$

De lo anterior de deduce que $\boldsymbol{A}$ es anterior a $\boldsymbol{B}$ si, y sólo si $\boldsymbol{A}$ es equipotente a algún subconjunto de $\boldsymbol{B}$, es decir,

$$\boldsymbol{A} \precsim \boldsymbol{B} \iff \exists\, \boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{B} \;\middle|\; \boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{C}$$

Es claro que $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \implies \boldsymbol{A} \precsim \boldsymbol{B} \iff \#(\boldsymbol{A}) \le \#(\boldsymbol{B})$. Sin embargo, puede suceder que $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$, pero $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B} \iff \#(\boldsymbol{A}) = \#(\boldsymbol{B})$, como en el caso de los conjuntos infinitos.

Teorema 21.1. La relación $\precsim$ es una relación de preorden, es decir, es reflexiva y transitiva.

Demostración. El mapeo identidad $1_{\boldsymbol{A}}\colon \boldsymbol{A} \rightrightarrows \boldsymbol{A}$ es inyectivo, lo que demuestra que la relación es reflexiva.

Sea $\boldsymbol{A} \precsim \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B} \precsim \boldsymbol{C}$. Entonces existen mapeos inyectivos $f\colon \boldsymbol{A} \rightrightarrows \boldsymbol{B}$ y $g\colon \boldsymbol{A} \rightrightarrows \boldsymbol{B}$. La composición $g \circ f\colon \boldsymbol{A} \rightrightarrows \boldsymbol{C}$ es un mapeo inyectivo, por lo tanto $\boldsymbol{A} \precsim \boldsymbol{C}$. ■

$$\boldsymbol{B} \succsim \boldsymbol{A} \text{ significa que } \boldsymbol{A} \precsim \boldsymbol{B},$$
$$\boldsymbol{A} \prec \boldsymbol{B} \text{ significa que } \boldsymbol{A} \precsim \boldsymbol{B}, \text{ pero } \boldsymbol{A} \nsim \boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{B} \succ \boldsymbol{A} \text{ significa que } \boldsymbol{A} \prec \boldsymbol{B}.$$

Teorema 22.1 (**Cantor**). Para cualquier conjunto $\boldsymbol{A}$, se cumple la relación

$$\boldsymbol{A} \prec \mathbf{2}^{\boldsymbol{A}}$$

Demostración. El mapeo $g\colon \boldsymbol{A} \rightrightarrows \mathbf{2}^{\boldsymbol{A}}$ definido por $f(\boldsymbol{a}) \coloneqq \{\boldsymbol{a}\}$ es inyectivo, por lo cual

$$\boldsymbol{A} \precsim \mathbf{2}^{\boldsymbol{A}}.$$

Para demostrar que $\boldsymbol{A} \nsim \mathbf{2}^{\boldsymbol{A}}$, procedemos por reducción al absurdo. Supóngase que $\boldsymbol{A} \sim \mathbf{2}^{\boldsymbol{A}}$, es decir, que existe un mapeo biyectivo $f\colon \boldsymbol{A} \rightleftarrows \mathbf{2}^{\boldsymbol{A}}$.

Sea $\boldsymbol{B} \coloneqq \{\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{x} \notin f(\boldsymbol{x}) \,\}$. Entonces $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A}$ y, por lo tanto $\boldsymbol{B} \in \mathbf{2}^{\boldsymbol{A}}$.

Como el mapeo f es biyectivo, entonces $\exists\, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{A} \mid f(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{B}$.

Se puede ver que cualquiera de las dos afirmaciones $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}$ ó $\boldsymbol{b} \notin \boldsymbol{B}$, lleva a una contradicción, por lo que entonces $\boldsymbol{A} \nsim \mathbf{2}^{\boldsymbol{A}}$, y por lo tanto $\boldsymbol{A} \prec \mathbf{2}^{\boldsymbol{A}}$. ■

Teorema 23.1 (**Cantor, Bernstein, Schröder**). Para cualesquiera dos conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{A} \precsim \boldsymbol{B} \;\wedge\; \boldsymbol{B} \precsim \boldsymbol{A} \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}.$$

Demostración. Como $\boldsymbol{A} \precsim \boldsymbol{B}$, entonces $\boldsymbol{A}$ es equipotente a un subconjunto $f(\boldsymbol{A})$ de $\boldsymbol{B}$, es decir, existe un mapeo inyectivo $f\colon \boldsymbol{A} \rightrightarrows \boldsymbol{B} \;\big|\; f(\boldsymbol{A}) \subseteq \boldsymbol{B}$ y $f(\boldsymbol{A}) \sim \boldsymbol{A} =: \boldsymbol{X}_0$.

Como $\boldsymbol{B} \precsim \boldsymbol{A}$, entonces $\boldsymbol{B}$ es equipotente a un subconjunto $g(\boldsymbol{B})$ de $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}_0$, es decir, existe un mapeo inyectivo $g\colon \boldsymbol{B} \rightrightarrows \boldsymbol{A} \;\big|\; g(\boldsymbol{B}) \subseteq \boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{Y}_0 := g(\boldsymbol{B}) \sim \boldsymbol{B}$.

Y como la composición $g \circ f$ de los mapeos inyectivos f y g es un mapeo inyectivo, se tiene,

$\boldsymbol{X}_1 := g(f(\boldsymbol{A})) \subseteq g(\boldsymbol{B}) \subseteq \boldsymbol{A} =: \boldsymbol{X}_0$. Es decir, $\boldsymbol{X}_0 \supseteq \boldsymbol{Y}_0 \supseteq \boldsymbol{X}_1$ y $\boldsymbol{X}_0 := \boldsymbol{A} \sim g(f((\boldsymbol{A})) =: \boldsymbol{X}_1$.

Para demostrar el teorema basta demostrar que $\boldsymbol{Y}_0 \sim \boldsymbol{X}_0$, es decir, que existe un mapeo biyectivo $h\colon \boldsymbol{X}_0 \rightleftarrows \boldsymbol{Y}_0$; con lo que se demuestra que $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, (ya que, así $\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{Y}_0 = g(\boldsymbol{B}) \sim \boldsymbol{B}$).

$\boldsymbol{X}_1 \sim \boldsymbol{X}_0 \supseteq \boldsymbol{Y}_0$, por lo tanto $\exists\; \boldsymbol{Y}_1 \subseteq \boldsymbol{X}_1 \;\big|\; \boldsymbol{Y}_1 \sim \boldsymbol{Y}_0$
$\boldsymbol{Y}_1 \sim \boldsymbol{Y}_0 \supseteq \boldsymbol{X}_1$, por lo tanto $\exists\; \boldsymbol{X}_2 \subseteq \boldsymbol{Y}_1 \;\big|\; \boldsymbol{X}_2 \sim \boldsymbol{X}_1$.
$\boldsymbol{X}_2 \sim \boldsymbol{X}_1 \supseteq \boldsymbol{Y}_1$, por lo tanto $\exists\; \boldsymbol{Y}_2 \subseteq \boldsymbol{X}_2 \;\big|\; \boldsymbol{Y}_2 \sim \boldsymbol{Y}_1$,… y así sucesivamente.

Se obtiene entonces una sucesión de subconjuntos

$\boldsymbol{X}_0 \supseteq \boldsymbol{Y}_0 \supseteq \boldsymbol{X}_1 \supseteq \boldsymbol{Y}_1 \supseteq \boldsymbol{X}_2 \supseteq \boldsymbol{Y}_2 \supseteq \cdots \supseteq \boldsymbol{X}_n \supseteq \boldsymbol{Y}_n \supseteq \cdots$, en los que $\boldsymbol{X}_i \sim \boldsymbol{X}_{i+1}$ y $\boldsymbol{Y}_i \sim \boldsymbol{Y}_{i+1}$.

Además, se tiene que $(\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{Y}_i) \sim (\boldsymbol{X}_{i+1} - \boldsymbol{Y}_{i+1})$, es decir, existe un mapeo biyectivo $\bar{g}\colon (\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{Y}_i) \rightleftarrows (\boldsymbol{X}_{i+1} - \boldsymbol{Y}_{i+1})$. El mapeo identidad $1\colon (\boldsymbol{Y}_i - \boldsymbol{X}_{i+1}) \rightleftarrows (\boldsymbol{Y}_i - \boldsymbol{X}_{i+1})$ también es un mapeo biyectivo.

Sea $\boldsymbol{D} := \bigcap_{i=0}^{\infty} (\boldsymbol{X}_i \cap \boldsymbol{Y}_i)$. Entonces

$\boldsymbol{X}_0 = (\boldsymbol{X}_0 - \boldsymbol{Y}_0) \cup (\boldsymbol{Y}_0 - \boldsymbol{X}_1) \cup (\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{Y}_1) \cup (\boldsymbol{Y}_1 - \boldsymbol{X}_2) \cup \cdots \cup \boldsymbol{D}$, y
$\boldsymbol{Y}_0 = (\boldsymbol{Y}_0 - \boldsymbol{X}_1) \cup (\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{Y}_1) \cup (\boldsymbol{Y}_1 - \boldsymbol{X}_2) \cup (\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{Y}_2) \cup \cdots \cup \boldsymbol{D}$.

El mapeo $\bar{f}(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} h(\boldsymbol{x}); & \text{si } \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{Y}_i) \\ \boldsymbol{x}; & \text{si } \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{Y}_i - \boldsymbol{X}_{i+1}) \cup \boldsymbol{D} \end{cases}$ es biyectivo, por lo que $\boldsymbol{Y}_0 \sim \boldsymbol{X}_0$. ■

Teorema 24.1. Para cualquier conjunto no vacío $\boldsymbol{X}$, el conjunto potencia $\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$ es equipotente a la familia $\mathbf{C}(\boldsymbol{X})$ de todas las funciones características de los subconjuntos de $\boldsymbol{X}$, es decir,

$$\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}} \sim \mathbf{C}(\boldsymbol{X})$$

Demostración. El mapeo $f\colon \mathbf{2}^{\boldsymbol{X}} \to \mathbf{C}(\boldsymbol{X})$, definido como $f(\boldsymbol{A}) := \chi_{\boldsymbol{A}}$, es biyectivo por lo que $\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$ es equipotente a $\mathbf{C}(\boldsymbol{X})$. ■

Teorema 25.1. El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es equipotente al conjunto potencia $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, o sea,

$$\mathbb{R} \sim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$$

Demostración. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbf{2}^{\mathbb{Q}}$ el mapeo definido como $f(\boldsymbol{a}) \coloneqq \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{Q} \mid \boldsymbol{x} < \boldsymbol{a} \,\}$. Si $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$, entonces $\exists \quad \boldsymbol{r} \in \mathbb{Q} \mid \boldsymbol{a} < \boldsymbol{r} < \boldsymbol{b}$. Por lo tanto $\boldsymbol{r} \notin f(\boldsymbol{a})$ y $\boldsymbol{r} \in f(\boldsymbol{b})$, es decir, el mapeo f es inyectivo, por lo que $\mathbb{R} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{Q}}$.

Sea $\mathbf{C}(\mathbb{N})$ la familia de todas las funciones características $\chi_{\boldsymbol{A}}\colon \boldsymbol{A} \to \{0, 1\}$ de los subconjuntos $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{N}$ del conjunto de los números naturales. Sea $g\colon \mathbf{C}(\mathbb{N}) \to [0, 1]$ el mapeo definido como

$$g(\chi_{\boldsymbol{A}}) \coloneqq 0.\chi_{\boldsymbol{A}}(1)\chi_{\boldsymbol{A}}(2)\,\chi_{\boldsymbol{A}}(3)\,\ldots$$

Si $\chi_{\boldsymbol{A}}, \chi_{\boldsymbol{B}} \in \mathbf{C}(\mathbb{N})$ y $\chi_{\boldsymbol{A}} \neq \chi_{\boldsymbol{B}}$, entonces $g(\chi_{\boldsymbol{A}}) \neq g(\chi_{\boldsymbol{B}})$, porque sus decimales son diferentes, así que el mapeo g es inyectivo, por lo que $\mathbf{C}(\mathbb{N}) \precsim [0, 1] \sim \mathbb{R}$.

Por el teorema de **Cantor, Bernstein, Schröder** se tiene que $\mathbb{R} \sim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. ■

Se puede demostrar (teorema de Cantor) que para cualesquiera dos conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ se cumple una de las siguientes relaciones (ley de tricotomía)

$$\boldsymbol{A} \precsim \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{B} \precsim \boldsymbol{A}$$

De esta manera, la clase de los números cardinales queda totalmente ordenada.

Teorema 26.1. Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos conjuntos no vacíos, con $\#(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{m}$ y $\#(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{n}$ donde $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$; y sea $\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{A}} \coloneqq \{f\colon\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}\}$ el conjunto de todos los mapeos $f\colon\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$. Entonces $\#(\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{A}}) = \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{m}}$.

Demostración. Primero se hará inducción sobre $\boldsymbol{m}$ y después se hará inducción sobre $\boldsymbol{n}$.

Para $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n} = 1$, es decir, $\boldsymbol{A} \coloneqq \{\boldsymbol{a}_1\}$ y $\boldsymbol{B} \coloneqq \{\boldsymbol{b}_1\}$. Se tiene $f(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{b}_1$, por lo que $\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{A}} = \{f\}$, es decir, $\#(\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{A}}) = 1^1 = 1$.

Supongamos que $\boldsymbol{A} \coloneqq \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{m}}, \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{m}+1}\}$, $\boldsymbol{B} \coloneqq \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{n}+1}\}$, es decir $\#(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{m} + 1$ y $\#(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{n} + 1$. Supóngase también que $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{m}} \coloneqq \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{m}-1}, \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{m}}\}$, $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{n}} \coloneqq \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{n}-1}, \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{n}}\}$ y que además $\#(\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{m}}) = \boldsymbol{m}$ y $\#(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{n}}) = \boldsymbol{n}$ implican $\#(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{m}}}) = \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{m}}$. Se tiene entonces

a) Por inducción sobre $\boldsymbol{m}$, se tiene $\boldsymbol{B}_n^{\boldsymbol{A}} = \bigcup_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \{\, f\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{n}} \mid f(\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{m}}) = \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{n}},\ f(\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{m}+1}) = \boldsymbol{b}_k \,\}$ y,

por lo tanto, $\#(\boldsymbol{B}_n^{\boldsymbol{A}}) = \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \#(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{m}}}) = \boldsymbol{n}\,\#(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{m}}}) = \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{m}+1}$

b) Por inducción sobre $\boldsymbol{n}$, se tiene

$$\#(\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{A}}) = \mathrm{C}^0_{\boldsymbol{m}+1}\,\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{m}+1} + \mathrm{C}^1_{\boldsymbol{m}+1}\,\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{m}} + \cdots + \mathrm{C}^{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{m}+1}\,\boldsymbol{n}^1 + \mathrm{C}^{\boldsymbol{m}+1}_{\boldsymbol{m}+1}\,\boldsymbol{n}^0 = (\boldsymbol{n}+1)^{\boldsymbol{m}+1}.$$

El producto $C^{k}_{m+1}\, n^{m+1-k}$ significa que:

1) C^{k}_{m+1} es la cantidad de funciones $f\colon A \to B_n$ para las cuales $\#(\{f^{-1}(b_{n+1})\}) = k$

2) n^{m+1-k} son los restantes $m + 1 - k$ elementos de A cuyas imágenes están en B_n. ■

El teorema siguiente es una generalización del teorema de Cantor.

Teorema 27.1. Sean A y B dos conjuntos no vacíos, con $\#(A) = m$ y $\#(B) = n$ donde $m, n \in \mathbb{N}$ y $n > 1$. Entonces, el conjunto $B^A \coloneqq \{f{:}A \to B\}$ de todos los mapeos $f{:}A \to B$ tiene cardinalidad mayor que la del conjunto A, es decir, $\#(A) < \#(B^A)$.

Demostración.

a) Existe un mapeo inyectivo $g{:}A \rightrightarrows B^A$ del conjunto A al conjunto B^A, es decir, $A \precsim B^A$.

b) No existe biyección $h\colon A \rightleftarrows B^A$ entre el conjunto A y el conjunto B^A es decir, $A \nsim B^A$.

Tómense dos elementos distintos y_1 y y_2 de B y para cada elemento x_0 defínase un mapeo $f_{x_0}{:}A \to B$ por la igualdad $f_{x_0}(x_0) \coloneqq y_1$ y $f_{x_0}(A - \{x_0\}) \coloneqq y_2$. A diferentes elementos x_1 y x_2 les corresponden diferentes mapeos:

$$f_{x_1}(x_1) \coloneqq y_1 \text{ y } f_{x_2}(x_1) \coloneqq y_2.$$

La inyectividad del mapeo $g{:}A \rightrightarrows B^A$ definido por la igualdad $g_{x_1}(x_0) \coloneqq f_{x_0}$, es decir, queda demostrado que $A \precsim B^A$.

Supongamos que existe un mapeo biyectivo $h\colon A \rightleftarrows B^A$, es decir, supongamos que $A \sim B^A$. Denotemos por $f^x \in B^A$ el mapeo que corresponde al elemento $x \in A$. La imagen de este elemento bajo el mapeo f^x es $f^x(x) \in B$. Defínase $f\colon A \to B$ por la igualdad $f(x) \coloneqq y$ en donde $y \in B$ es cualquier elemento de B distinto de $f^x(x)$, es decir, $f(x) = y \in B - \{f^x(x)\}$ (esto es posible puesto que B contiene al menos dos elementos). Este mapeo $f\colon A \to B$ es distinto de todos los mapeos $f^x \in B^A$. En efecto, ya que si f fuera igual a algún f^x, entonces, para un elemento $x \in A$ se tendría $f(x) = f^x(x)$, lo que entraría en contradicción con la definición del mapeo f. ■

Corolario (Teorema de Cantor). Para cualquier conjunto A, se cumple la relación

$$A \prec 2^A .$$

Demostración. Sea $B = \{0, 1\}$. Entonces a cada mapeo $f{:}A \to B$ le corresponde una partición del conjunto A en dos conjuntos disjuntos: el conjunto $A_0^f \coloneqq \{\, x \in A \mid f(x) = 0 \,\}$ y el conjunto $A_1^f \coloneqq \{\, x \in A \mid f(x) = 1 \,\}$. Poniendo nuestra atención a los conjuntos A_1^f podemos decir que a cada mapeo $f{:}A \to B$ le corresponde un determinado subconjunto $A_1^f \subseteq A$. y recíprocamente, a cada subconjunto $A_1^f \subseteq A$ le corresponde un determinado mapeo $f{:}A \to B$ (llamado mapeo característico de A_1^f). Queda establecida la bisección entre el conjunto potencia 2^A y el conjunto de todos los mapeos $f{:}A \to B$ en los que $\#(B) = 2$. Como este conjunto tiene cardinalidad mayor que $\#(A)$, el teorema de Cantor queda demostrado. ■

Obsérvese que el teorema de cantor es válido y para $\boldsymbol{A} = \varnothing$. En este caso $\#(\mathbf{2}^{\boldsymbol{A}}) = 1$, mientras que $\#(\boldsymbol{A}) = 0$.

De acuerdo al teorema 26.1, si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son dos conjuntos no vacíos, con $\#(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{m}$ y $\#(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{n}$ en donde $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$; entonces $\#(\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{A}}) = \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{m}}$. Por eso, cuando $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son conjuntos infinitos, la cardinalidad del conjunto $\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{A}} \coloneqq \{f{:}\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}\}$ de todos los mapeos $f{:}\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ se denota también por $\#(\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{A}}) \eqqcolon \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{m}}$ en donde $\#(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{m}$ y $\#(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{n}$. En particular, el conjunto potencia de un conjunto $\boldsymbol{A}$ se denota por $2^{\boldsymbol{A}}$ y su cardinalidad $\#(2^{\boldsymbol{A}}) \eqqcolon 2^{\boldsymbol{m}}$ en donde $\#(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{m}$.

Se demostró anteriormente que la familia $\mathbf{C}(\mathbb{N})$ de todas las funciones características $\chi_{\boldsymbol{A}}$: $\boldsymbol{A} \to \{0, 1\}$ de los subconjuntos $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{N}$ del conjunto de los números naturales es equipotente al conjunto potencia $2^{\mathbb{N}}$ del conjunto $\mathbb{N}$.

Se demostró también que el conjunto potencia $2^{\mathbb{N}}$ del conjunto $\mathbb{N}$ es equipolente el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, esto es, $2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$ o sea, $2^{\aleph_0} = \#(2^{\mathbb{N}}) = \#(\mathbb{R}) = \mathbf{c}$.

Se sigue, $\mathbf{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, de donde $\mathbf{c} = 2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq \mathbf{c}^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. Se tiene entonces

$$\aleph_0^{\aleph_0} = \mathbf{c}.$$

§ 16.1 CONJUNTOS BIEN ORDENADOS

Definición 19.1. Un conjunto ordenado ($\boldsymbol{A}$, $\precsim$) se dice *bien ordenado* si cada subconjunto no vacío de $\boldsymbol{A}$ tiene un primer elemento.

Un conjunto bien ordenado es totalmente ordenado, un conjunto totalmente ordenado es dirigido y un conjunto dirigido es parcialmente ordenado.

De la definición se sigue inmediatamente que todo subconjunto de un conjunto bien ordenado es bien ordenado. En particular, puesto que $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{A}$, entonces todo conjunto bien ordenado ($\boldsymbol{A}$, $\precsim$) tiene un primer elemento.

Ejemplo. El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, con el orden natural $\leq$ es un conjunto bien ordenado.

Ejemplo. El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, con el orden natural $\leq$ no es un conjunto bien ordenado ya que tiene un subconjunto (él mismo) que no tiene primer elemento.

Tipos ordinales. La relación de isomorfismo de conjuntos es una relación de equivalencia. Se dice que dos conjuntos bien ordenados tienen el mismo orden ó que tienen un mismo *tipo ordinal*, si son isomorfos. El tipo ordinal de un conjunto $\boldsymbol{A}$ se denota por o($\boldsymbol{A}$).

Todo conjunto isomorfo a un conjunto bien ordenado es bien ordenado y todos los conjuntos finitos ordenados que tienen la misma cardinalidad son isomorfos entre sí. Si dos conjuntos bien ordenados $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son isomorfos entre sí, se escribe o($\boldsymbol{A}$) = o($\boldsymbol{B}$).

Números ordinales. El tipo ordinal de un conjunto bien ordenado se llama *número ordinal*.

El número ordinal de los conjuntos bien ordenados:

$$\varnothing, \{1\},\ \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \ldots$$

se denota respectivamente, por $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ y se llaman números ordinales finitos. Los números ordinales que no son finitos se llaman números ordinales transfinitos.

El número ordinal del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, con el orden natural $\leq$ se denota como ω, es decir, $\omega \coloneqq$ o($\mathbb{N}$).

Suma de Conjuntos Bien Ordenados. Sea $\sigma = \{\boldsymbol{S_i}\}_{i\in I}$ una familia bien ordenada de conjuntos bien ordenados disjuntos dos a dos. Para cualesquiera $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \widetilde{\sigma}$ existen $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} \in I$ tales que $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{S}_i$ y $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{S}_j$. Defínase un orden en la unión $\widetilde{\sigma} = \bigcup_{i\in I} \boldsymbol{S}_i$ de la siguiente manera: $\boldsymbol{a} \precsim \boldsymbol{b}$ en $\widetilde{\sigma}$, si $\boldsymbol{i} \precsim \boldsymbol{j}$ en I; y si $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$ en I, entonces $\boldsymbol{a} \precsim \boldsymbol{b}$ en $\widetilde{\sigma}$, para $\boldsymbol{a} \precsim \boldsymbol{b}$ en $\boldsymbol{S}_i$. En este caso decimos que $\widetilde{\sigma}$ es la *suma ordenada* de la familia σ de conjuntos bien ordenados y la denotamos como $\sum_{i\in I} \boldsymbol{S}_i$.

Se escribe $S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ en lugar de $\sum_{i=1}^{n} S_i$. En particular, si $S \coloneqq S_1 = S_2 = \cdots = S_n$, entonces se escribe $S\,n$ en lugar de $S + S + \cdots + S$.

Ejemplo. Los conjuntos $A = \{1, 3, 5, \ldots\}$ y $B = \{2, 4, 6, \ldots\}$ son conjuntos bien ordenados disjuntos. La suma ordenada de A y B es el conjunto $A + B = \{1, 3, 5, \ldots ; 2, 4, 6, \ldots\}$.

Ejemplo. Los conjuntos $A = \{1, 3, 5, \ldots\}$ y $B = \{a, b\}$ son conjuntos bien ordenados disjuntos. Se tiene $A + B = \{1, 3, 5, \ldots ; a, b\}$ y $B + A = \{a, b; 1, 3, 5, \ldots\}$. Se ve claro que $A + B \neq B + A$ porque es orden es distinto y no se puede establecer un isomorfismo entre $A + B$ y $B + A$ sin alterar el orden.

Ejemplo. Los conjuntos $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ y $A = \{a\}$ son conjuntos bien ordenados disjuntos. Se tiene $\mathbb{N} + A = \{1, 2, 3, \ldots ; a\}$ y $A + \mathbb{N} = \{a; 1, 2, 3, \ldots\}$. Se ve claro que $A + B \neq B + A$.

Teorema 28.1. La suma $\sum_{i\in I} S_i$ de una familia bien ordenada $\sigma = \{S_i\}_{i\in I}$ de conjuntos bien ordenados es un conjunto bien ordenado.

Demostración. Sea $S = \sum_{i\in I} S_i$ la suma de de una familia bien ordenada $\sigma = \{S_i\}_{i\in I}$ de conjuntos bien ordenados. Sea S' un subconjunto de S no vacío. Como el conjunto I es un conjunto bien ordenado, entonces Sea S_{i_0} el primer conjunto S_i de σ que contiene elementos del conjunto S'. Como $S_{i_0} \cap S'$ es un subconjunto no vacío del conjunto bien ordenado S_{i_0} debe tener un primer elemento. Este elemento evidentemente es primer elemento del conjunto ordenado S'. ■

Principio de inducción transfinita. Sea A un conjunto bien ordenado, sea $a_0 \in A$ el primer elemento del conjunto A y sea $S \subseteq A$ un subconjunto de A que tiene las siguientes propiedades:

1) $a_0 \in S$
2) $\mathring{s}(a) \coloneqq \{\, x \in A \mid x \prec a \,\} \subseteq S \implies a \in S$.

Entonces $S = A$.

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que $S \neq A$. Entonces $A - S$ es un subconjunto no vacío de A y por lo tanto tiene un primer elemento $s_0 \in A - S$. Como cualquier elemento $x_0 \in \mathring{s}(s_0)$ es anterior a s_0 no puede pertenecer a $A - S$ por lo que debe pertenecer a S. Por lo tanto $\mathring{s}(s_0) \subseteq S$. Esto implica (por 2)) que $s_0 \in S$, lo que contradice que $s_0 \in A - S$. Obsérvese que $a_0 \in S$ se deduce de 2), puesto que $\varnothing = \mathring{s}(a_0) \subseteq S$ y, por lo tanto $a_0 \in S$. ■

A excepción del último elemento, cualquier otro elemento de un conjunto bien ordenado tiene un siguiente.

Elemento límite. Un elemento $a \in A$ es un *elemento límite* del conjunto ordenado A, si no es primer elemento de A y no tiene precedente.

Ejemplo. Sean $A = \{1, 3, 5, \ldots\}$ y $B = \{2, 4, 6, \ldots\}$. Entonces $2 \in A + B$ es un elemento límite del conjunto ordenado $A + B = \{1, 3, 5, \ldots; 2, 4, 6, \ldots\}$, ya que no es el primer elemento y no tiene precedente.

Teorema 29.1. Sea A un conjunto bien ordenado, sea $f\colon A \rightleftarrows B$ un isomorfismo, en donde $B \subseteq A$. Entonces

$$\forall\, a \in A, \text{ se tiene } a \precsim f(a).$$

Demostración. Hay que demostrar que $S = \{\, x \in A \mid f(x) \prec x \,\} = \emptyset$. Supongamos lo contrario, es decir, que S es un subconjunto no vacío del conjunto bien ordenado A por lo cual tiene un primer elemento $s_0 \in S$, para el que $f(s_0) \prec s_0$. El mapeo f es un isomorfismo, por lo que

$$f(s_0) \prec s_0 \iff f\,(f(s_0)) \prec f(s_0)$$

Esto significa que $f(s_0) \in S$. Sin embargo $f(s_0) \prec s_0$, lo que contradice que s_0 sea el primer elemento de S. ■

Teorema 30.1. Existe no más de un único isomorfismo $f\colon A \rightleftarrows B$ entre dos conjunto bien ordenados A y B.

Demostración. Supongamos que existen dos isomorfismos distintos $f\colon A \rightleftarrows B$ y $g\colon A \rightleftarrows B$ y sea a un elemento de A, para el que $f(a) \neq g(a)$. Supóngase primero que $f(a) \prec g(a)$. Entonces

$$f(a) \prec g(a) \Longrightarrow g^{-1} \circ f(a) \prec g^{-1} \circ g(a) = a\,.$$

Esto es, $g^{-1} \circ f\colon A \rightleftarrows A$ es un isomorfismo para el cual $g^{-1} \circ f\,(a) \prec a$, contradiciendo al teorema 29. Análogamente, si se supone $f(a) \prec g(a)$ se llega también a una contradicción. ■

Teorema 31.1. Sea A un conjunto bien ordenado. Entonces A no puede ser isomorfo a ninguna de sus secciones iniciales.

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir que existe un isomorfismo $f\colon A \rightleftarrows \mathring{s}(a)$ entre A y una de sus secciones iniciales $\mathring{s}(a)$.

Entonces $f(a) \in \mathring{s}(a)$ y, por lo tanto, $f(a) \prec a$, en contradicción con el teorema 29. ■

Corolario. Dos secciones iniciales de un conjunto bien ordenado no pueden ser isomorfas.

Demostración. Supongamos que $\mathring{s}(a)$ y $\mathring{s}(b)$ dos secciones iniciales de un conjunto bien ordenado A y que $\mathring{s}(a) \neq \mathring{s}(b)$. Por el teorema 11 se tiene que $a \precsim b \iff \mathring{s}(a) \subseteq \mathring{s}(b)$. Por lo tanto, ó bien $a \prec b$, ó bien $b \prec a$. Pero $a \prec b \iff \mathring{s}(a) \subset \mathring{s}(b)$, lo que significaría que $\mathring{s}(a)$ es una sección inicial de $\mathring{s}(b)$ y $b \prec a \iff \mathring{s}(b) \subset \mathring{s}(a)$, lo que significaría que $\mathring{s}(b)$ es una sección inicial de $\mathring{s}(a)$. ■

§ 17.1 Comparación de Ordinales

Si un conjunto bien ordenado $\boldsymbol{A}$ es isomorfo a una de las secciones iniciales $s(\boldsymbol{b})$ de un conjunto bien ordenado $\boldsymbol{B}$, se dice que $\boldsymbol{A}$ no es más largo que $\boldsymbol{B}$, ó que $\boldsymbol{B}$ no es más corto que $\boldsymbol{A}$, y se escribe $\boldsymbol{A} \precsim \boldsymbol{B}$ ó bien, que el número ordinal o($\boldsymbol{A}$) de $\boldsymbol{A}$ es menor ó igual que el número ordinal o($\boldsymbol{B}$) de $\boldsymbol{B}$, lo que se escribe como o($\boldsymbol{A}$) ≤ o($\boldsymbol{B}$).

Teorema 32.1. Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos conjuntos bien ordenados y sea $\mathring{s}(\boldsymbol{a})$. Entonces para cualquier sección inicial $\mathring{s}(\boldsymbol{a})$ de $\boldsymbol{A}$, no puede existir más de una sección inicial $\mathring{s}(\boldsymbol{b})$ de $\boldsymbol{B}$ sea isomorfa a ella.

Demostración. Sean $\mathring{s}(\boldsymbol{a}) \simeq \mathring{s}(\boldsymbol{b}_1)$ y $\mathring{s}(\boldsymbol{a}) \simeq \mathring{s}(\boldsymbol{b}_2)$, donde $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \in \boldsymbol{B}$. Como la relación de isomorfismo es una relación de equivalencia, entonces $\mathring{s}(\boldsymbol{b}_1) \simeq \mathring{s}(\boldsymbol{b}_2)$, y por el corolario anterior, esto sucede sólo si $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_2$. ■

Teorema 33.1. Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos conjuntos bien ordenados en los cuales una sección inicial $\mathring{s}(\boldsymbol{a})$ de $\boldsymbol{A}$ es isomorfa a una sección inicial $\mathring{s}(\boldsymbol{b})$ de $\boldsymbol{B}$. Entonces cualquier sección inicial $\mathring{s}(\boldsymbol{a}')$ de $\mathring{s}(\boldsymbol{a})$ es isomorfa a alguna sección inicial $\mathring{s}(\boldsymbol{b}')$ de $\mathring{s}(\boldsymbol{b})$, es decir, que si $\mathring{s}(\boldsymbol{a}) \simeq \mathring{s}(\boldsymbol{b})$ y, entonces $\forall\, \mathring{s}(\boldsymbol{a}') \subseteq \mathring{s}(\boldsymbol{a})\ \exists\, \mathring{s}(\boldsymbol{b}') \subseteq \mathring{s}(\boldsymbol{b}) \mid \mathring{s}(\boldsymbol{a}') \simeq \mathring{s}(\boldsymbol{b}')$, además, si $f\colon \mathring{s}(\boldsymbol{a}) \rightleftarrows \mathring{s}(\boldsymbol{b})$ es un isomorfismo, entonces la restricción $f' \coloneqq f|_{\mathring{s}(\boldsymbol{a}')}\colon \mathring{s}(\boldsymbol{a}') \rightleftarrows \mathring{s}(\boldsymbol{b}') = f(\mathring{s}(\boldsymbol{a}'))$, también es un isomorfismo.

Demostración. Sea $f(\boldsymbol{a}') = \boldsymbol{b}'$. Como la restricción $f'\colon \mathring{s}(\boldsymbol{a}') \rightleftarrows \mathring{s}(\boldsymbol{b}')$ a $\mathring{s}(\boldsymbol{a}')$ es inyectiva y preserva el orden, se tiene $\mathring{s}(\boldsymbol{a}') \simeq f'(\mathring{s}(\boldsymbol{a}'))$; y como $f\colon \mathring{s}(\boldsymbol{a}) \rightleftarrows \mathring{s}(\boldsymbol{b})$ es un isomorfismo, entonces

$$\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{a}' \iff f'(\boldsymbol{x}) \prec f'(\boldsymbol{a}'),$$

por lo que $f'(\mathring{s}(\boldsymbol{a}')) = \mathring{s}(\boldsymbol{b}')$, es decir, $\mathring{s}(\boldsymbol{a}') = \mathring{s}(\boldsymbol{b}')$. ■

Teorema 34.1. Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos conjuntos bien ordenados. Entonces ó $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$ ó uno de los conjuntos es isomorfo a una de las secciones iniciales del otro, es decir, dados dos conjuntos bien ordenados, entonces

$$\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B} \ \text{ó}\ \boldsymbol{A} \precsim \boldsymbol{B} \ \text{ó}\ \boldsymbol{B} \precsim \boldsymbol{A}.$$

Demostración. Sean $\boldsymbol{A}_1 = \{\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \mid \mathring{s}(\boldsymbol{x}) \simeq \mathring{s}(\boldsymbol{y}), \text{ para algún } \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B} \,\}$, y
$\boldsymbol{B}_1 = \{\, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B} \mid \mathring{s}(\boldsymbol{x}) \simeq \mathring{s}(\boldsymbol{y}), \text{ para algún } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \,\}$

Demostremos que $\boldsymbol{A}_1 \simeq \boldsymbol{B}_1$.

Para cada $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}_1$, por el teorema 34, cada sección inicial $\mathring{s}(\boldsymbol{x})$ de $\boldsymbol{A}$ es isomorfa a una sección inicial única $\mathring{s}(\boldsymbol{y})$ de $\boldsymbol{B}$ y viceversa. Significa que existe una biyección $f\colon \boldsymbol{A}_1 \rightleftarrows \boldsymbol{B}_1$, definida como

$$f(\boldsymbol{x}) \coloneqq \boldsymbol{y}, \qquad \text{si} \qquad \mathring{s}(\boldsymbol{x}) \simeq \mathring{s}(\boldsymbol{y}).$$

Para $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}_1$ tales que $\boldsymbol{x}_1 \prec \boldsymbol{x}$, se tiene $f(\boldsymbol{x}_1) \coloneqq \boldsymbol{y}_1$ y $f(\boldsymbol{x}) \coloneqq \boldsymbol{y}$.

Sea $g\colon \mathring{s}(\boldsymbol{x}) \rightleftarrows \mathring{s}(\boldsymbol{y}) = f(\mathring{s}(\boldsymbol{x}))$, un isomorfismo cuya restricción de a $\mathring{s}(\boldsymbol{x}_1)$, según el teorema 35, es un isomorfismo y por el teorema 34, es único, por lo que $g|_{\mathring{s}(\boldsymbol{x}_1)} = f|_{\mathring{s}(\boldsymbol{x}_1)} = \boldsymbol{y}_1$. Pero como $g(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{y}_1 \in \mathring{s}(\boldsymbol{y})$, entonces $\boldsymbol{y}_1 \prec \boldsymbol{y}$, lo que demuestra que $\boldsymbol{A}_1 \simeq \boldsymbol{B}_1$.

Ahora bien, sólo existen cuatro posibilidades:

1) $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}$, con la cual $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$.

2) $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}_1 = \mathring{s}(\boldsymbol{b}) \subset \boldsymbol{B}$, con la cual $\boldsymbol{A} \precsim \boldsymbol{B}$.

3) $\boldsymbol{A}_1 = \mathring{s}(\boldsymbol{a}) \subset \boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}$, con la cual $\boldsymbol{B} \precsim \boldsymbol{A}$.

4) $\boldsymbol{A}_1 = \mathring{s}(\boldsymbol{a}) \subset \boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}_1 = \mathring{s}(\boldsymbol{b}) \subset \boldsymbol{B}$. En este caso, $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}_1$, puesto que, por la definición de $\boldsymbol{A}_1$, $\mathring{s}(\boldsymbol{a})$ es isomorfa a una sección inicial $\mathring{s}(\boldsymbol{b})$ de $\boldsymbol{B}$. Pero $\boldsymbol{a} \notin \mathring{s}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{A}_1$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, este último caso es imposible. ■

Corolario. La relación $\simeq$ es una relación de equivalencia.

Nótese que $\boldsymbol{A} \precsim \boldsymbol{B} \Longleftrightarrow \boldsymbol{A} \simeq s(\boldsymbol{b}) \subseteq \boldsymbol{B}$, y si $\boldsymbol{b}$ es el último elemento de $\boldsymbol{B}$, se tiene $\boldsymbol{A} \simeq s(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{B}$.

Si un conjunto bien ordenado $\boldsymbol{A}$ es isomorfo a una de las secciones iniciales estrictas $\mathring{s}(\boldsymbol{b})$ de un conjunto bien ordenado $\boldsymbol{B}$, se dice que $\boldsymbol{A}$ es más corto que $\boldsymbol{B}$, ó que $\boldsymbol{B}$ es más largo que $\boldsymbol{A}$, y se escribe $\boldsymbol{A} \prec \boldsymbol{B}$ ó bien, que el número ordinal $\mathrm{o}(\boldsymbol{A})$ de $\boldsymbol{A}$ es menor que el número ordinal $\mathrm{o}(\boldsymbol{B})$ de $\boldsymbol{B}$, lo que se escribe como $\mathrm{o}(\boldsymbol{A}) < \mathrm{o}(\boldsymbol{B})$.

Nótese que $\boldsymbol{A} \prec \boldsymbol{B} \Longleftrightarrow \boldsymbol{A} \simeq s(\boldsymbol{b}) \subset \boldsymbol{B}$, es decir $\boldsymbol{A} \prec \boldsymbol{B} \Longleftrightarrow \boldsymbol{A} \precsim \boldsymbol{B}$, pero $\boldsymbol{A} \not\simeq \boldsymbol{B}$.

Por definición se tiene también que $\boldsymbol{A} \succsim \boldsymbol{B} \Longleftrightarrow \boldsymbol{B} \precsim \boldsymbol{A}$ y, análogamente, $\boldsymbol{A} \succ \boldsymbol{B} \Longleftrightarrow \boldsymbol{B} \prec \boldsymbol{A}$.

Además, se tiene $\mathrm{o}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{o}(\boldsymbol{B}) \Longleftrightarrow \boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$.

Definición 20.1. Sean $\alpha = \mathrm{o}(\boldsymbol{A})$ y $\beta = \mathrm{o}(\boldsymbol{B})$ los números ordinales de los conjuntos bien ordenados $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ respectivamente, tales que

$$\alpha < \beta.$$

Por definición se tienen también las siguientes relaciones:

$\alpha < \beta \Longleftrightarrow \boldsymbol{A} \prec \boldsymbol{B}$,
$\alpha > \beta \Longleftrightarrow \boldsymbol{B} \prec \boldsymbol{A}$,
$\alpha = \beta \Longleftrightarrow \boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$,
$\alpha \leq \beta \Longleftrightarrow \boldsymbol{A} \precsim \boldsymbol{B}$, es decir, $\alpha < \beta$ ó $\alpha = \beta$.
$\alpha \geq \beta \Longleftrightarrow \boldsymbol{B} \precsim \boldsymbol{A}$, es decir, $\alpha < \beta$ ó $\alpha > \beta$.

Entonces, todo conjunto de números ordinales queda bien ordenado por la relación $\alpha \leq \beta$.

Teorema 35.1. Sea $\mathring{s}(\alpha)$ el conjunto de los números ordinales menores que el número ordinal α. Entonces $\alpha = \mathrm{o}(\mathring{s}(\alpha))$.

Demostración. Sean $\alpha = \mathrm{o}(\boldsymbol{A})$ el ordinal de un conjunto $\boldsymbol{A}$ y $S(\boldsymbol{A})$ la familia de las secciones iniciales de $\boldsymbol{A}$ ordenadas por la relación de inclusión. Por el teorema 11, se tiene que $\boldsymbol{A} \simeq S(\boldsymbol{A})$, por lo que $\alpha = \mathrm{o}(S(\boldsymbol{A}))$.

Sea $\beta = \mathrm{o}(\boldsymbol{B}) \in \mathring{s}(\alpha)$. Entonces $\beta < \alpha$, por lo que $\boldsymbol{B} \precsim \boldsymbol{A}$, es decir, $\boldsymbol{B}$ es isomorfo a una sección inicial $\mathring{s}(\boldsymbol{b})$ de $\boldsymbol{A}$. Por lo tanto $\beta = \mathrm{o}(\mathring{s}(\boldsymbol{b}))$ y como dos secciones iniciales distintas no pueden ser isomorfas entre sí, entonces $\mathring{s}(\boldsymbol{b})$ es la única sección inicial tal que $\beta = \mathrm{o}(\mathring{s}(\boldsymbol{b}))$.

El mapeo $f\colon \mathring{s}(\alpha) \rightrightarrows S(\boldsymbol{A})$, definido como $f(\boldsymbol{b}) \coloneqq \mathring{s}(\boldsymbol{b})$, si $\beta = \mathrm{o}(\mathring{s}(\boldsymbol{b}))$, es inyectivo. Además, si $\mathring{s}(\boldsymbol{c}) \in S(\boldsymbol{A})$, entonces $\mathring{s}(\boldsymbol{c}) \precsim \boldsymbol{A}$ y, por lo tanto, $\gamma = \mathrm{o}(\mathring{s}(\boldsymbol{c})) < \mathrm{o}(\boldsymbol{A}) = \alpha$, esto es, $\gamma \in \mathring{s}(\alpha)$, es decir, $f(\gamma) \coloneqq \mathring{s}(\boldsymbol{b})$, por lo que f es sobreyectivo.

Sean ahora $\beta, \gamma \in \mathring{s}(\alpha)$ tales que $\gamma < \beta$. Entonces $\gamma = \mathrm{o}(\mathring{s}(\boldsymbol{c}))$ y $\beta = \mathrm{o}(\mathring{s}(\boldsymbol{b}))$, esto es $f(\gamma) \coloneqq \mathring{s}(\boldsymbol{c})$ y $f(\beta) \coloneqq \mathring{s}(\boldsymbol{b})$, con lo que $\mathring{s}(\boldsymbol{c})$ es una sección inicial de $\mathring{s}(\boldsymbol{b})$, es decir, $\mathring{s}(\boldsymbol{c})$ es un subconjunto propio de $\mathring{s}(\boldsymbol{b})$, lo que significa que $\mathring{s}(\boldsymbol{c}) \prec \mathring{s}(\boldsymbol{b})$, es decir, que f preserva el orden y, por lo tanto, es un isomorfismo. Se tiene entonces, $\mathrm{o}(\mathring{s}(\alpha)) = \mathrm{o}(S(\boldsymbol{A})) = \alpha$. ■

Definición 21.1. Sea $\{\alpha_{\mathrm{i}}\}_{i\in I}$ un conjunto ordenado de números ordinales $\alpha_{\mathrm{i}} = \mathrm{o}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{i}})$. Se define la *suma de los números ordinales* de la familia $\{\alpha_{\mathrm{i}}\}_{i\in I}$ de la siguiente manera:

$$\sum_{i\in I} \alpha_{\mathrm{i}} \coloneqq \mathrm{o}\Big(\bigcup_{i\in I} \{\, \boldsymbol{A}_i \times \{\alpha_{\mathrm{i}}\}\}\Big).$$

De acuerdo a la definición, se tiene

$$1 + 1 + 1 + \cdots = \omega,$$

En general, para todo número ordinal (finito) no nulo α_{i} se tiene

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots = \sum_{i\in \mathbb{N}} \alpha_{\mathrm{i}} = \omega$$

Teorema 36.1. El número ordinal $\alpha + 1$ es el siguiente del número ordinal α.

Demostración. Por la definición de sección inicial, se tiene $s(\alpha) = \mathring{s}(\alpha) \cup \{\alpha\}$, por lo tanto $\mathrm{o}(s(\alpha)) = \mathrm{o}(\mathring{s}(\alpha)) + \mathrm{o}(\{\alpha\})$, es decir, $\mathrm{o}(s(\alpha)) = \mathrm{o}(\mathring{s}(\alpha)) + 1$. ■

De esa manera, se tiene:

$0 \coloneqq \mathrm{o}(\emptyset)$
$1 \coloneqq \mathrm{o}(\{0\})$
$2 \coloneqq \mathrm{o}(\{0, 1\})$
$3 \coloneqq \mathrm{o}(\{0, 1, 2\})$
$\vdots$
$\omega \coloneqq \mathrm{o}(\{0, 1, 2, \ldots\}) = \mathrm{o}(\mathbb{N})$

El siguiente de este número ordinal sería entonces, $\omega + 1 \coloneqq \mathrm{o}(\{0, 1, 2, \ldots; \omega\})$.

Definición 22.1. Se define *el producto* $\alpha\beta$ de dos números ordinales $\alpha = \mathrm{o}(\boldsymbol{A})$ y $\beta = \mathrm{o}(\boldsymbol{A})$ cualesquiera como el número ordinal

$$\alpha\beta \coloneqq \mathrm{o}(\{\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}\})$$

en donde el conjunto producto $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} := \{ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mid \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B} \}$ está ordenado de la manera siguiente:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \prec (\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}') \iff \boldsymbol{a} \prec \boldsymbol{a}' \text{ ó si } \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}', \text{ pero } \boldsymbol{b} \prec \boldsymbol{b}'.$$

Números Ordinales de Primera y Segunda Clase. Llamamos números ordinales de primera clase a todos los números naturales y al cero. De este modo, los números de primera clase, son los tipos ordinales de los conjuntos bien ordenados finitos. A los tipos ordinales de los conjuntos bien ordenados infinitos contables los llamaremos números transfinitos contables ó números ordinales (transfinitos) de segunda clase. El conjunto de todos los números ordinales de primera clase lo denotamos por $\mathbb{N}_0$. El conjunto de todos los números ordinales de primera y segunda clase lo denotamos por $\mathbb{N}_1$. El conjunto de todos los números ordinales de segunda clase lo denotamos por $\mathbb{Z}_1$.

Teorema 37.1. Sea $\boldsymbol{A}$ un conjunto contable (finito ó infinito) bien ordenado de números ordinales de segunda clase, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots,$. El primer número ordinal α que mayor que todos los elementos de $\boldsymbol{A}$ es también es un número ordinal de segunda clase. En otras palabras, ningún subconjunto contable del conjunto $\mathbb{N}_1$ de todos los números ordinales de primero y segundo orden es confinal de $\mathbb{N}_1$.

Demostración. Se tienen dos casos:

a) El conjunto $\boldsymbol{A}$ tiene un elemento maximal $\alpha_m = \boldsymbol{max}\ \boldsymbol{A}$. Entonces $\alpha := \alpha_m + 1$, por definición, es un número ordinal de segunda clase y es el primer número ordinal que es mayor que todos los elementos de $\boldsymbol{A}$.

b) El conjunto $\boldsymbol{A}$ no tiene elemento maximal. Denotemos como α al primer número ordinal que es mayor que todos los elementos de $\boldsymbol{A}$. Se tiene entonces

$$\mathring{s}(\alpha) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{s}(\alpha_n).$$

En efecto, evidentemente se tiene que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{s}(\alpha_n) \subseteq \mathring{s}(\alpha)$. Sea ahora $\beta \in \mathring{s}(\alpha)$, por lo que α es el primer número ordinal α que mayor que todos los α_n, y $\beta < \alpha$, por lo cual existe un $\alpha_m > \beta$, es decir, $\beta \in \mathring{s}(\alpha_m)$.

De la igualdad, se sigue que $\mathring{s}(\alpha)$ es un conjunto contable. Pero, por el teorema 37, se tiene $\alpha = o(\mathring{s}(\alpha))$. ■

Corolario. El conjunto $\mathbb{Z}_1$ de todos los números ordinales de segunda clase es un conjunto no contable.

Demostración. Por reducción al absurdo. Supóngase que $\mathbb{Z}_1$ es un conjunto contable. Entonces, por el teorema 39 existe un número ordinal α de segunda clase, que es mayor que todos los números ordinales de segunda clase, en particular, $\alpha > \alpha$, lo que es imposible. ■

La cardinalidad $\#(\mathbb{Z}_1)$ del conjunto $\mathbb{Z}_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}$ de todos los números ordinales de segunda clase se denota como $\aleph_1$, es decir,

$$\#(\mathbb{Z}_1) =: \aleph_1$$

El primer número ordinal mayor que todos los números ordinales de segunda clase, se denota por ω_1. Entonces ω_1 es el tipo ordinal del conjunto $\mathbb{N}_1 = \mathring{s}(\omega_1)$. Por su definición, ω_1 es el primer número ordinal transfinito no contable y cualquier número ordinal $\alpha < \omega_1$ será contable (finito ó infinito). De aquí se deduce que el conjunto $\mathbb{N}_1$ de todos los números ordinales de primera y segunda clase tiene el mismo tipo ordinal ω_1 y, por lo tanto $\#(\mathbb{N}_1) = \aleph_1$.

Corolario. No existe ningún número cardinal m que satisfaga la desigualdad:

$$\mathbb{N}_0 < m < \mathbb{N}_1.$$

Demostración. Por reducción al absurdo. Supóngase que existe tal número cardinal m. Como $m < \mathbb{N}_1$, entonces existe un subconjunto $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{N}_1$ tal que $m = \#(\boldsymbol{A})$. Pero por la desigualdad $\mathbb{N}_0 < m$, el conjunto $\boldsymbol{A}$ no es un conjunto contable, por lo que tiene cardinalidad $\aleph_1$. Obtenemos una contradicción. ■

Ejemplo. Para los siguientes conjuntos bien ordenados $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}\}$ y $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \ldots\}$, se tiene $1 = \mathrm{o}(\boldsymbol{A})$ y $\omega = \mathrm{o}(\boldsymbol{B})$. La suma $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ (unión ordenada) de estos conjuntos es el conjunto bien ordenado:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \ldots\},$$

que es isomorfo al conjunto $\boldsymbol{A}$, por lo que se tiene $\omega = \mathrm{o}(\boldsymbol{A})$, es decir, $1 + \omega = \omega$. Sin embargo, la suma $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$ (unión ordenada) de estos conjuntos es el conjunto bien ordenado:

$$\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \ldots; \boldsymbol{a}\},$$

que no es isomorfo al conjunto $\boldsymbol{A}$, por lo que se tiene $\omega \neq \mathrm{o}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A})$. Sin embargo $\boldsymbol{B}$ es isomorfo a la sección inicial (estricta) $\mathring{s}(\boldsymbol{a})$ de $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$, por lo que se tiene la desigualdad $\mathrm{o}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}) > \omega$.

Por otra parte, como $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \ldots; \boldsymbol{a}\} = s(\boldsymbol{a})$, entonces tenemos que $\mathrm{o}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}) = \omega + 1 > \omega$, es decir,

$$1 + \omega = \omega \neq \omega + 1.$$

Análogamente, si $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ y $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \ldots\}$, se puede comprobar que, en general, para cualquier número natural $\boldsymbol{n}$, se tiene

$$\boldsymbol{n} + \omega = \omega \neq \omega + \boldsymbol{n}.$$

Lo que demuestra que la suma de números ordinales no es conmutativa.

Se ve claro que la suma de números ordinales es asociativa:

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

El número ordinal $0 = \mathrm{o}(\emptyset)$ es el elemento neutro para la suma

$$0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha.$$

Ejemplo. Para los siguientes conjuntos bien ordenados:

$\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ y $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \ldots\}$, se tiene $2 = \mathrm{o}(\boldsymbol{A})$ y $\omega = \mathrm{o}(\boldsymbol{B})$. El producto $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ de estos conjuntos es el conjunto bien ordenado:

$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1), (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1), (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2), (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2), (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_3), (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_3), \ldots\}$, que es isomorfo al conjunto $\boldsymbol{A}$, por lo que se tiene $\omega = \mathrm{o}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$, es decir, $2\,\omega = \omega$. Sin embargo, el producto $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$ de estos conjuntos es el conjunto bien ordenado:

$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} = \{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_1), (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_1), (\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{a}_1), \ldots; (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2), (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_2), (\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{a}_2), \ldots\}$, que no es isomorfo al conjunto $\boldsymbol{A}$, por lo que se tiene $\omega \neq \mathrm{o}(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A})$. Sin embargo $\boldsymbol{B}$ es isomorfo a la sección inicial (estricta) $\mathring{s}((\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2))$ de $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$, por lo que se tiene la desigualdad $\mathrm{o}(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}) > \omega$, es decir, $\mathrm{o}(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}) = \omega\, 2 > \omega$, es decir, $2\,\omega = \omega \neq \omega\, 2$.

Se puede comprobar que, en general, para cualquier número natural $\boldsymbol{n}$, se tiene

$$\boldsymbol{n}\,\omega = \omega \neq \omega\,\boldsymbol{n}.$$

Lo que demuestra que el producto de números ordinales no es conmutativo.

Se ve claro que el producto de números ordinales es asociativo:

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma.$$

El número ordinal $1 = \mathrm{o}(\{0\})$ es el elemento neutro para el producto

$$1\,\alpha = \alpha\,1 = \alpha.$$

Además, el producto de números ordinales es distributivo a la izquierda respecto a la suma:

$$\alpha\,(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

§ 18.1 ESTRUCTURA DE LOS NÚMEROS ORDINALES

Los números ordinales de primera clase, según su orden son:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Le siguen, el primer ordinal límite ω, y los demás números ordinales de segunda clase, según su orden

$$\omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \omega + 4, \omega + 5, \ldots$$

El segundo ordinal límite es $\omega 2$, que con sus siguientes tenemos

$\omega 2, \omega 2 + 1, \omega 2 + 2, \omega 2 + 3, \omega 2 + 4, \omega 2 + 5, \ldots$

…siguiendo de la misma manera, se tiene

$\omega 3, \omega 3 + 1, \ldots; \omega 4, \omega 4 + 1, \ldots; \omega 5, \omega 5 + 1, \ldots ; \ldots ; \omega\omega =: \omega^2,$

Continuando de la misma manera se tiene

$\omega^2, \omega^2 + 1, \ldots; \omega^2 + \omega, \omega^2 + \omega + 1, \ldots; \omega^2 + \omega 2, \omega^2 + \omega 2 + 1, \ldots ; \omega^2 + \omega^2 =: \omega^2 2.$

Más adelante siguen las potencias

$\omega^2 2, \omega^2 2 + 1, \ldots; \omega^2\omega =: \omega^3, \omega^3 + 1, \ldots; \omega^4, \omega^4 + 1, \ldots ; \ldots ; \omega^2\, \omega =: \omega^3.$

Después

$\omega^3, \omega^3 + 1, \ldots; \omega^4, \omega^4 + 1, \ldots; \omega^5, \omega^5 + 1, \ldots ; \ldots ; \omega^\omega.$

Prosiguiendo,

$\omega^\omega, \omega^\omega + 1, \ldots; \omega^\omega + \omega, \ldots; \omega^\omega + \omega^2, \ldots ; \omega^\omega\, \omega =: \omega^{\omega+1}, \ldots ; \omega^{\omega 2}, \ldots; \omega^{\omega 3},, \ldots; \omega^{\omega^2}, \ldots; \omega^{\omega^3}, \ldots; \omega^{\omega^\omega}, \ldots ; \omega^{\omega^{\omega^\omega}} \ldots$, etc.

Sea $\boldsymbol{A}$ un conjunto no vacío de números ordinales. Existe entonces un número ordinal β mayor que cualquier $\alpha \in \boldsymbol{A}$. Entre los números ordinales mayores que cualquier $\alpha \in \boldsymbol{A}$ existe uno (y único) β_0 que es el menor. Veamos dos casos:

1º El conjunto $\boldsymbol{A}$ tiene un último elemento $\alpha' \in \boldsymbol{A}$. Entonces, es evidente que $\alpha' + 1$ es el primer número ordinal mayor que cualquier $\alpha \in \boldsymbol{A}$.

2º El conjunto $\boldsymbol{A}$ no tiene último elemento. En este caso, el primer número ordinal β mayor que cualquier $\alpha \in \boldsymbol{A}$, tiene la propiedad de que para cualquier número ordinal $\alpha' < \beta$, el intervalo $]\, \alpha, \beta\, [$ del conjunto bien ordenado $s(\beta) = \mathring{s}(\beta + 1) = \mathring{s}(\beta) + 1$, contiene a todos los elementos α de $\boldsymbol{A}$ mayores que el número $\alpha' \in \boldsymbol{A}$. En este caso se dice que El conjunto bien ordenado $\boldsymbol{A}$ converge ó tiende al número ordinal β, (es decir, β es un elemento límite del conjunto $\boldsymbol{A}$) y se escribe:

$$\beta = \lim_{\alpha \in \boldsymbol{A}} \alpha.$$

En particular, sea $\mathring{s}(\beta)$ un conjunto de números ordinales donde β es un número ordinal. Si $\mathring{s}(\beta)$ tiene un último elemento α', entonces $\beta = \alpha' + 1$ y en este caso el intervalo $]\alpha', \alpha' + 2[$ tiene un único elemento $\beta = \alpha + 1$, llamado *número ordinal de primer género* (ó número aislado). Como

ejemplos de número ordinal de primer género tenemos todos los números naturales, todos los números $\omega + 1$, $\omega + n$, …; $\omega^2 + 1$, $\omega^3 + \omega^2 + \omega + 1$, … etc.

Si $\mathring{s}(\beta)$ no tiene último elemento, el intervalo $]\,\alpha', \beta\,[$ en donde $\alpha' < \beta$, contiene un conjunto infinito de elementos de $\mathring{s}(\beta)$ y el número β es llamado *número ordinal de segundo género* (ó número límite). Como ejemplos de número ordinal de primer género tenemos los números ω, $\omega 2$, …; $\omega\, n$, ω^n, $\omega^2 + \omega$, … etc.

A cada número ordinal $\alpha < \omega_1$ le sigue el número $\alpha + 1 < \omega_1$, es decir, un número de primer género. Significa que el conjunto $\mathbb{N}_1$ es confinal a su subconjunto de todos los números de primer género. Este último subconjunto, que por el corolario anterior es no contable; tiene tipo ordinal ω_1 (se puede establecer un isomorfismo $f(\alpha) := \alpha + 1$, donde $\alpha < \omega_1$; entre el conjunto $\mathbb{N}_1$ y el subconjunto de todos los números de primer género). Por otra parte, cada número $\alpha < \omega_1$ tiene un elemento límite mayor que él (por ejemplo $\alpha + \omega$). De esto se sigue que el conjunto $\mathbb{N}_1$ es confinal a su subconjunto de todos los números de segundo género, que, por el corolario anterior tampoco es contable y tiene tipo ordinal ω_1

Teorema 38.1. Si $\alpha < \omega_1$ es un número límite transfinito, entonces existe una sucesión (creciente) de números ordinales

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$$

menores que α y que tienen a α como su número límite

$$\alpha = \lim_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n.$$

Demostración. Por el teorema   la sección inicial $\alpha = \mathring{s}(\alpha)$ es un conjunto contable, por lo que sus elementos pueden ser escritos como una sucesión

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$$

Entre estos números no existe último elemento, ya que α es un número de segundo género (nótese que el orden en este último conjunto, en general puede no ser el mismo que en $\mathring{s}(\alpha)$). Tómese $\alpha_0 = \beta_0$. Como β_0 no es el último elemento del conjunto, entonces existe otro número mayor que él. Sea este $\alpha_1 = \beta_{i_1} > \beta_0$ aquél que tenga el menor subíndice $i_1 \geq 1$. Se tiene

$$\beta_{i_0} < \beta_{i_1}, \quad i_0 = 0 < i_1.$$

Como β_{i_1} no es el último elemento del conjunto, entonces existe otro número mayor que él. Sea este $\alpha_2 = \beta_{i_2} > \beta_{i_1}$ aquél que tenga el menor subíndice $i_2 \geq i_1$. Se tiene

$$\beta_{i_0} < \beta_{i_1} < \beta_{i_2}, \quad 0 = i_0 < i_1 < i_2.$$

Continuando de esta manera, se obtiene

$$\alpha_0 = \beta_{i_0}, \alpha_1 = \beta_{i_1}, \alpha_2 = \beta_{i_2}, \ldots, \alpha_n = \beta_{i_n}, \ldots$$

en donde

$$0 = i_0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_n < \cdots$$

Demostremos que $\alpha = \lim_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n$. Es claro que α es mayor que cualquier α_n. Falta entonces demostrar que no existe ningún $\beta \in \mathring{s}(\alpha)$ que sea mayor que todos los β_{i_n}. Como entre los α_n, figuran

todos los elementos de $\overset{\circ}{s}(\alpha)$, entonces β es algún β_k. y como el conjunto de números naturales i_n crece indefinidamente, existe un único número n tal que $i_n \le k < i_{n+1}$. Entonces se tiene $\beta_k < \beta_{i_{n+1}} = \alpha_{n+1}$. En caso contrario el número $\beta_{i_{n+1}}$ hubiera sido elegido en forma incorrecta, pues $\beta_{i_n} < \alpha_k$ y tendría un subíndice k menor que el número $\beta_{i_{n+1}}$. ■

Teorema 39.1. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Entonces $\aleph_1 \le \boldsymbol{c} = \#(\mathbb{R})$.

Demostración. Es suficiente demostrar que existe un subconjunto $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\#(\mathbb{R}) = \aleph_1$. Construyamos una partición del intervalo $\boldsymbol{I} =]0, 1[$, en $\aleph_1$ conjuntos en la forma $\boldsymbol{I} = \bigcup_{\omega \le \alpha \le \omega_1} \boldsymbol{I}_\alpha$.

Enumeremos todos los números racionales del intervalo $\boldsymbol{I} =]0, 1[$ como sigue

$$r_1, r_2, r_3, \dots r_n, \dots$$

Sea $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}$ un elemento cualquiera de $\boldsymbol{I}$. El número $\boldsymbol{x}$ puede ser representado unívocamente por la serie infinita

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}} + \dots + \frac{1}{2^{n_k}} + \dots$$

Si dicho número permite dos representaciones en sistema binario, tomemos aquella que a partir de alguna cifra, le siguen puras unidades.

Estudiemos el conjunto $r_{n_1}, r_{n_2}, r_{n_3}, \dots, r_{n_k}, \dots$ de números racionales.

Existen dos posibilidades:

1) Este conjunto no está bien ordenado (en orden creciente). En este caso hacemos corresponder al número $\boldsymbol{x}$ el conjunto $\boldsymbol{I}_{\omega_1}$.

2) Este conjunto está bien ordenado y tiene el tipo ordinal α, en donde $\omega \le \alpha \le \omega_1$. En este caso hacemos corresponder al número $\boldsymbol{x}$ el conjunto $\boldsymbol{I}_\alpha$.

De esta manera, cada número $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}$ queda contenido en un único conjunto $\boldsymbol{I}_\alpha$, en donde $\omega \le \alpha \le \omega_1$. Por lo tanto los conjuntos $\boldsymbol{I}_\alpha$ forman una partición de $\boldsymbol{I}$. Demostremos que para cada número de segunda clase α el conjunto $\boldsymbol{I}_\alpha$ es no vacío.

En efecto, como existen conjuntos $\boldsymbol{J}_\alpha$ de números racionales que tienen tipo ordinal $\alpha = \text{o}(\boldsymbol{J}_\alpha)$. Tómese alguno de estos conjuntos $\boldsymbol{J}_\alpha$ y supongamos que sus elementos son los números racionales

$$r_{n_1}, r_{n_2}, r_{n_3}, \dots, r_{n_k}, \dots$$

El número real $\boldsymbol{x} = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}} + \dots + \frac{1}{2^{n_k}} + \dots$ es un elemento del conjunto $\boldsymbol{I}_\alpha$.

Por el axioma de elección, podemos elegir un elemento $\boldsymbol{x}_\alpha$ de cada conjunto $\boldsymbol{I}_\alpha$. El conjunto obtenido $\boldsymbol{A} = \{\, \boldsymbol{x}_\alpha \}$ tiene cardinalidad $\aleph_1$. ■

§ 19.1 PARADOJAS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

Paradoja de Cantor (Conjunto de todos los conjuntos)

Sea $\boldsymbol{C}$ el conjunto de todos los conjuntos. Por lo tanto, puesto que $\boldsymbol{C} \in \boldsymbol{C}$, entonces $\mathbf{2}^{\boldsymbol{C}} \subseteq \boldsymbol{C}$. Pero $\mathbf{2}^{\boldsymbol{C}} \subseteq \boldsymbol{C}$ implica $\mathbf{2}^{\boldsymbol{C}} \precsim \boldsymbol{C}$, lo cual contradice al teorema de Cantor.

Paradoja de Russell

Sea $\boldsymbol{Z}$ el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como elementos, es decir,

$$\boldsymbol{Z} \coloneqq \{\, \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{A} \notin \boldsymbol{A} \,\}$$

Se puede ver que cualquiera de los dos casos $\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Z}$ ó $\boldsymbol{Z} \notin \boldsymbol{Z}$, siempre lleva a una contradicción.

Conjunto de todos los números cardinales.

Sea $\mathscr{C}$ el conjunto de todos los números cardinales. Entonces para cada cardinal $\alpha \in \mathscr{C}$ se tiene un conjunto tal que $\alpha = \#(\boldsymbol{A}_\alpha)$. Sea

$$\boldsymbol{A} = \bigcup_{\alpha \in \mathscr{C}} \boldsymbol{A}_\alpha .$$

Para el conjunto potencia $2^{\boldsymbol{A}}$ de $\boldsymbol{A}$ se tiene $2^{\boldsymbol{A}} \sim \boldsymbol{A}_{\#(2^{\boldsymbol{A}})} \subseteq \boldsymbol{A}$, lo que significa $2^{\boldsymbol{A}} \precsim \boldsymbol{A}$, contradiciendo así el teorema de Cantor.

Paradoja de Burali-Forti (Conjunto de todos los números ordinales)

Sea $\mathscr{O}$ el conjunto de todos los números ordinales. Como el conjunto $\mathscr{O}$ es bien ordenado, sea $\alpha = \mathrm{o}(\mathscr{O})$. Para la sección inicial $\mathring{s}(\alpha)$ se tiene que $\alpha = \mathrm{o}(\mathring{s}(\alpha))$. Por lo tanto

$$\mathrm{o}(\mathring{s}(\alpha)) = \alpha = \mathrm{o}(\mathscr{O})$$

Esto significa que $\mathscr{O}$ es isomorfo a una de sus secciones iniciales, lo que contradice al teorema 33.

Familia de todos los conjuntos equipotentes a un conjunto dado.

Sea $\boldsymbol{A}$ un conjunto dado y sea $\boldsymbol{I}$ otro conjunto cualquiera. Para cada $i \in \boldsymbol{I}$ considérense los conjuntos

$$\boldsymbol{A}_i \coloneqq \boldsymbol{A} \times \{i\} = \{(\boldsymbol{a}, i), (\boldsymbol{b}, i), \ldots\}$$
$$\boldsymbol{A}_j \coloneqq \boldsymbol{A} \times \{j\} = \{(\boldsymbol{a}_i, j), (\boldsymbol{a}_j, j), \ldots\}$$

....

....

....

Formamos la familia de conjuntos $\{\boldsymbol{A}_i\}_{i\in \boldsymbol{I}}$. Puede verse que $\{\boldsymbol{A}_i\}_{i\in \boldsymbol{I}} \sim \boldsymbol{I}$. Sea $\mathscr{A}$ la familia de todos los conjuntos equipotentes al conjunto $\boldsymbol{A}$.

Para el conjunto potencia $2^{\mathscr{A}}$, definiendo como se vio la familia de conjuntos $\{\boldsymbol{A}_i\}_{i\in 2^{\mathscr{A}}}$, ya que $\boldsymbol{A}_i \sim \boldsymbol{A}$ para todo $i \in \boldsymbol{I}$; se tiene

$$\{\boldsymbol{A}_i\}_{i\in 2^{\mathscr{A}}} \subset \mathscr{A}$$

Por lo tanto, $2^{\mathscr{A}} \sim \{\boldsymbol{A}_i\}_{i\in 2^{\mathscr{A}}} \precsim \mathscr{A}$, lo que contradice el teorema de Cantor.

***Familia de todos los conjuntos isomorfos a un conjunto bien ordenado dado*.**

Sea $\boldsymbol{A}$ un conjunto bien ordenado dado y sea $\boldsymbol{I}$ otro conjunto cualquiera. Para cada $i \in \boldsymbol{I}$ considérense los conjuntos

$$\boldsymbol{A}_i \coloneqq \boldsymbol{A} \times \{i\} = \{(\boldsymbol{a}, i), (\boldsymbol{b}, i), \ldots\}$$
$$\boldsymbol{A}_j \coloneqq \boldsymbol{A} \times \{j\} = \{(\boldsymbol{a}_i, j), (\boldsymbol{a}_j, j), \ldots\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Estos conjuntos con el orden $(\boldsymbol{a}, i) \precsim (\boldsymbol{b}, i) \iff \boldsymbol{a} \precsim \boldsymbol{b}$ son bien ordenados e isomorfos al conjunto $\boldsymbol{A}$, es decir, $\boldsymbol{A}_i \simeq \boldsymbol{A}$.

Sea $\mathscr{A}$ la familia de todos los conjuntos isomorfos al conjunto bien ordenado $\boldsymbol{A}$.

Para el conjunto potencia $2^{\mathscr{A}}$, definiendo como se vio la familia de conjuntos $\{\boldsymbol{A}_i\}_{i\in 2^{\mathscr{A}}}$, ya que $\boldsymbol{A}_i \simeq \boldsymbol{A}$ para todo $i \in \boldsymbol{I}$; se tiene

$$\{\boldsymbol{A}_i\}_{i\in 2^{\mathscr{A}}} \subset \mathscr{A}$$

Por lo tanto, $2^{\mathscr{A}} \sim \{\boldsymbol{A}_i\}_{i\in 2^{\mathscr{A}}} \precsim \mathscr{A}$, lo que contradice el teorema de Cantor.

CAPÍTULO II
NÚMEROS REALES

§ 1.2 AXIOMAS DE LOS NÚMEROS REALES.

En este parágrafo se enuncian las propiedades fundamentales de los números reales, las cuales se toman como axiomas y los números reales se definen axiomáticamente. Las propiedades se dividen en tres grupos axiomas de campo, axiomas de orden y el axioma de continuidad.

Definición 1.2. El conjunto $\mathbb{R}$ se llama *conjunto de los números reales* (y sus elementos se llaman números reales), si satisface los siguientes axiomas:

Axiomas de Campo.

1) Propiedades de Cerradura. Están definidas dos operaciones binarias:
   $+: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\quad (a; b) \to +(a; b) =: a + b$, llamada suma o adición y
   $\cdot: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\quad (a; b) \to \cdot\,(a; b) =: a\, b$ llamada producto o multiplicación.

2) Las operaciones + y · son asociativas
   $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} \qquad a + (b + c) = (a + b) + c$
   $\forall\, a, b, b \in \mathbb{R} \qquad a\,(bc) = (ab)c$

3) Las operaciones + y · son conmutativas
   $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \quad a + b = b + a$
   $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \quad ab = ba$

4) Existencia de neutros
   $\exists\, 0 \in \mathbb{R} \mid \forall\, a \in \mathbb{R} \qquad a + 0 = 0 + a = a$
   $\exists\, 1 \in \mathbb{R} \mid \forall\, a \in \mathbb{R} \qquad a\,1 = 1\,a = a$

5) Existencia de inversos
   $\forall\, a \in \mathbb{R} \qquad \exists\, -a \in \mathbb{R} \mid \qquad a + (-a) = (-a) + a = 0$
   $\forall\, a \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \qquad \exists\, a^{-1} \in \mathbb{R} \mid \qquad a\,a^{-1} = a^{-1}\,a = 1$

6) La operación producto $\cdot: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es distributiva con respecto a la operación suma $+: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
   $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} \qquad a\,(b + c) = ab + ac$

Axiomas de Orden

Existe un subconjunto $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$ llamado conjunto de los números reales positivos, que satisface los siguientes axiomas:

7) Propiedades de Cerradura. Están definidas bien las dos operaciones binarias + y · en $\mathbb{R}^+$:

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}^+ \quad a + b \in \mathbb{R}^+ \ \text{ y } \ ab \in \mathbb{R}^+$$

8) $\forall\, a \in \mathbb{R}-\{0\}$ ó $a \in \mathbb{R}^+$ ó $-a \in \mathbb{R}^+$, pero no a ambos
9) $0 \notin \mathbb{R}^+$, $-0 = 0$.

La relación $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ se puede definir como sigue:

$$\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{a}) \in \mathbb{R}^{+}$$

Axioma de Continuidad

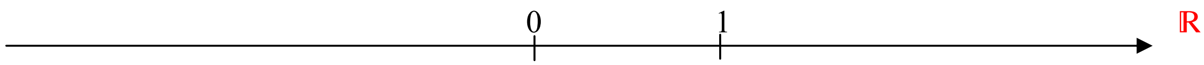
10) Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$, que tienen la siguiente propiedad:

$$\text{si } \forall\, \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A} \text{ y } \forall\, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B} \text{ se tiene } \boldsymbol{a} < \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{+},$$

entonces existe un número $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$, tal que $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{c} < \boldsymbol{y}$ para cualesquiera $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}$.

§ 2.2 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS REALES

Con relación a los números reales comúnmente se utiliza una interpretación geométrica tomando en cuenta que entre los puntos de una recta $\mathbb{L}$ y el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ se puede establecer un mapeo biyectivo que conserva la relación de orden. En otras palabras, existe un isomorfismo entre los puntos de una recta $\mathbb{L}$, (llamada recta real) y el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, lo cual permite utilizar las palabras número y punto como sinónimos. La recta $\mathbb{L}$ se denota entonces también como $\mathbb{R}$. La interpretación geométrica será utilizada constantemente.



Como el conjunto ($\mathbb{R}$, $\leq$) de los números reales es un conjunto totalmente ordenado con la desigualdad, se adoptan las definiciones de los intervalos de los conjuntos totalmente ordenados.

En ocasiones conviene extender el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales con dos elementos al conjunto $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ llamado conjunto extendido de los números reales o recta real extendida, en donde los elementos $+\infty$, llamado *más infinito* y $-\infty$, llamado *menos infinito*; son definidos axiomáticamente como sigue:

$\forall\, a \in \mathbb{R}$

1) $-\infty < a < +\infty,\ -\infty < +\infty,$
2) $a + (+\infty) = +\infty + a = a - (-\infty) = (+\infty) - a = +\infty,$
3) $a + (-\infty) = -\infty + a = a - (+\infty) = (-\infty) - a = -\infty,$
4) para $a > 0$, $a\,(+\infty) = (+\infty)\,a = +\infty,\ \ a\,(-\infty) = (-\infty)\,a = -\infty,$
5) para $a < 0$, $a\,(+\infty) = (+\infty)\,a = -\infty,\ \ a\,(-\infty) = (-\infty)\,a = +\infty,$
6) $0\,(+\infty) = (+\infty)\,0 = 0\,(-\infty) = (-\infty)\,0 = 0,\ \dfrac{0}{+\infty} = \dfrac{0}{-\infty} = 0,$
7) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty,\ \ (-\infty) + (-\infty) = -\infty,$
8) $(+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty,\ \ (+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty.$

Para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$, se definen los siguientes conjuntos:

$[\, a, b\,] \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \,\}$ - intervalo acotado cerrado o segmento.
$]\, a, b\,[\coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \,\}$ - intervalo acotado abierto.
$[\, a, b\,[\coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \,\}$ - intervalo acotado que contiene extremo inferior.
$]\, a, b\,] \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \,\}$ - intervalo acotado que contiene extremo superior.
$[\, a, +\infty\,[\coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \,\} \eqqcolon \mathbb{R}^+(a)$ - intervalo no acotado cerrado que contiene extremo inferior.
$]\, a, +\infty\,[\coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \,\}$ - intervalo abierto no acotado superiormente.
$]\, -\infty, b\,] \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \leq b \,\} \eqqcolon \mathbb{R}^-(b)$ - intervalo no acotado cerrado que contiene extremo superior.
$]\, -\infty, b\,[\coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid x < b \,\}$ - intervalo abierto no acotado inferiormente.
$]\, -\infty, +\infty\,[\coloneqq \mathbb{R}$, $[\, -\infty, +\infty\,] \coloneqq \mathbb{R}^*$,
$[\, a, +\infty\,] \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R}^* \mid a \leq x \,\}$, $]\, a, +\infty\,] \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R}^* \mid a < x \,\}$,
$[\, -\infty, b\,] \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R}^* \mid x \leq b \,\}$, $]\, -\infty, b\,[\coloneqq \{\, x \in \mathbb{R}^* \mid x < b \,\}$.

El número $|\, b - a \,| = |\, a - b \,|$ se llama distancia entre a y b ó longitud del intervalo definido por a y b.

Para denotar que un conjunto $S \subset \mathbb{R}$ no es acotado superiormente se escribe $\boldsymbol{sup}\ S = +\infty$.
Para denotar que un conjunto $S \subset \mathbb{R}$ no es acotado inferiormente se escribe $\boldsymbol{inf}\ S = -\infty$.

§ 3.2 PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LOS NÚMEROS REALES.

Los axiomas del parágrafo anterior sirven para demostrar las todas principales de los números reales, de las cuales se tiene entre las principales las siguientes:

Propiedades de Campo

1) Simplificación

a) $a + c = b + c \implies a = b$.
b) $ac = bc$ y $c \neq 0 \implies a = b$.

De estas dos propiedades se deduce que los elementos 0 y 1 del axioma 4) son únicos.

2) Posibilidad de sustracción y división

$\forall\ a, b \in \mathbb{R}\ \exists!\ x \in \mathbb{R} \mid a + x = b$, el elemento x se denota por $x =: b - a$;

$\forall\ a, b \in \mathbb{R}\ a \neq 0\ \exists!\ x \in \mathbb{R} \mid ax = b$, el elemento x se denota por $x =: \dfrac{b}{a}$ ó $x =: b/a$.

3) $b - a = b + (-a)$; y $0 - a = -a$.
$-(-a) = a$;
$a(b - c) = ab - ac$;
$0\,a = a\,0 = 0$.

4) $a \neq 0 \implies b/a = ba^{-1}$; y $1/a = a^{-1}$
$a \neq 0 \implies (a^{-1})^{-1} = a$;
$ab = 0 \implies a = 0$ ó $b = 0$;
$(-a)\,b = -ab$; y $(-a)(-b) = ab$;

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \qquad b \neq 0,\ d \neq 0;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd} \qquad b \neq 0,\ d \neq 0;$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} \qquad b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0.$$

Propiedades de Orden

Por definición tenemos:

$a > b \iff b < a$,
$a \leq b \iff a < b$ ó $a = b$,
$a \geq b \iff b \leq a$.

Ley de Tricotomía. $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ se cumple una, y sólo una de las siguientes relaciones:

1) ó $a < b$ ó $a = b$ ó $b < a$;

Transitividad:

2) $a < b$ y $b < c \implies a < c$.
3) $a < b \implies a + c < b + c$;
4) $a < b$ y $c > 0 \implies a\,c < b\,c$;
5) $a < b$ y $c < 0 \implies a\,c > b\,c$;
6) $a \neq 0 \implies a^2 > 0$;
7) $a < b \implies -a > -b$. De esto se sigue que $a < 0 \implies -a > 0$;
8) $1 > 0$;
9) $ab > 0 \implies$ ó ($a > 0$ y $b > 0$) ó ($a < 0$ y $b < 0$);
10) $a < c$ y $b < d \implies a + b < c + d$.

Propiedades de Continuidad

Teorema 1.2. Todo conjunto no vacío $A \subseteq \mathbb{R}$ de números reales acotado superiormente (inferiormente) tiene un único extremo superior (extremo inferior).

Demostración. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto no vacío de números reales acotado superiormente (inferiormente) y sea

$$B \coloneqq \{\, y \in \mathbb{R} \mid x \leq y \ \forall\, x \in A \,\} \qquad (\, B \coloneqq \{\, y \in \mathbb{R} \mid y \leq x \ \forall\, x \in A \,\}\,)$$

El conjunto B de los mayorantes (minorantes) de A. El conjunto B no es vacío, puesto que A es acotado superiormente (inferiormente). Por el axioma de continuidad, se tiene que

$$\exists\, c \in \mathbb{R} \mid x \leq c \leq y \ \ \forall\, x \in A \ \text{ y } \ \forall\, y \in B.$$

El punto c es un mayorante (minorante) de A, por lo tanto $c \in B$. Además, el punto c es un minorante (mayorante) de B, es decir, $c \leq y$ ($y \leq c$) $\forall\, y \in B$. Por lo tanto $c = \sup A$ ($c = \inf A$).

Sean $c = \sup A$ y $c' = \sup A$ dos extremos superiores del conjunto A. Se tiene que $c' \leq c$ puesto que $c' = \sup A$ y c es un mayorante de A. Además $c' \leq c$ puesto que también $c = \sup A$ y c' es un mayorante de A. Pero entonces $c = c'$ por la propiedad antisimétrica de la relación de orden $\leq$ de los números reales. ■

Teorema 2.2. Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$, que tienen la siguiente propiedad:

$$\forall\, a \in A \ \text{ y } \ \forall\, b \in B \ \text{ se tiene } a < b.$$

Si Todo conjunto no vacío $A \subseteq \mathbb{R}$ de números reales acotado superiormente tiene un supremo, entonces existe un número $c \in \mathbb{R}$, tal que $x \leq c \leq y$ para cualesquiera $x \in A$ y $y \in B$.

Demostración. Sean A, $B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos tales, que $a < b \ \ \forall\, a \in A$ y $\forall\, b \in B$. Se ve entonces que A es acotado superiormente y B lo es inferiormente. Entonces A tiene un supremo $c \in \mathbb{R}$, es decir, $c = \sup A$.

Como cualquier elemento de B es un mayorante de A y $c = \sup A$, entonces $c \leq b\ \forall\, b \in B$, es decir $c \leq \inf B$. Queda claro que $x \leq c \leq y \ \ \forall\, x \in A$ y $\forall\, y \in B$. Más aún, $\sup A \leq \inf B$. ■

§ 4.2 El Conjunto de los Números Naturales

Definición 2.2. Un conjunto $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$ no vacío de números reales se llama *inductivo*, si

$$\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{A} \implies \boldsymbol{n} + 1 \in \boldsymbol{A}.$$

Lema 1. La intersección de conjuntos inductivos es un conjunto inductivo.

Demostración. Sea $\{\boldsymbol{A}_i\}_{i \in \mathrm{I}}$ una familia de conjuntos inductivos. Entonces

$$\boldsymbol{x} \in \bigcap_{i \in \mathrm{I}} \boldsymbol{A}_i \implies \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}_i \quad \forall\, i \in \mathrm{I} \implies \boldsymbol{x} + 1 \in \boldsymbol{A}_i \quad \forall\, i \in \mathrm{I} \implies \boldsymbol{x} + 1 \in \bigcap_{i \in \mathrm{I}} \boldsymbol{A}_i. \blacksquare$$

Definición 3.2. Se llama *conjunto de los números naturales* a la intersección $\mathbb{N}$ de todos los conjuntos inductivos $\boldsymbol{A}_i$, que contienen a la unidad 1, es decir, que $1 \in \boldsymbol{A}_i \quad \forall\, \boldsymbol{A}_i$.

Principio de Inducción Matemática. Sea $\boldsymbol{K} \subseteq \mathbb{N}$ conjunto no vacío de números naturales, tal que:

1) $1 \in \boldsymbol{K}$;
2) $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{K} \implies \boldsymbol{n} + 1 \in \boldsymbol{K}$.

Entonces $\boldsymbol{K} = \mathbb{N}$.

Lema 2. Las operaciones de adición y multiplicación de números reales son cerradas en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales.

Demostración. Sean $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ dos números naturales cualesquiera. Hay que demostrar que $\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ y $\boldsymbol{m}\,\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.

Sea $\boldsymbol{K} \coloneqq \{\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} \mid \boldsymbol{m} + \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} \quad \forall\, \boldsymbol{m} \in \mathbb{N} \,\} \subseteq \mathbb{N}$.

Como $\boldsymbol{m} \in \mathbb{N} \implies \boldsymbol{m} + 1 \in \mathbb{N}$, entonces $1 \in \boldsymbol{K}$. Además, si $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{K}$, es decir, si $\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\boldsymbol{m} + (\boldsymbol{n} + 1) = (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}) + 1 \in \mathbb{N}, \text{ por lo que } \boldsymbol{n} + 1 \in \boldsymbol{K}.$$

Por el principio de inducción matemática, se tiene que $\boldsymbol{K} = \mathbb{N}$.

Análogamente, sea $\boldsymbol{K} \coloneqq \{\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} \mid \boldsymbol{m}\,\boldsymbol{n} \in \mathbb{N} \quad \forall\, \boldsymbol{m} \in \mathbb{N} \,\} \subseteq \mathbb{N}$.

Como $\boldsymbol{m} \in \mathbb{N} \implies \boldsymbol{m}\,1 = \boldsymbol{m} \in \mathbb{N}$, entonces $1 \in \boldsymbol{K}$. Además, si $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{K}$, es decir, si $\boldsymbol{m}\,\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, se tiene que $\boldsymbol{m}\,(\boldsymbol{n} + 1) = \boldsymbol{m}\,\boldsymbol{n} + \boldsymbol{m} \in \mathbb{N}$, es una suma de números naturales, por lo que $\boldsymbol{m}\,(\boldsymbol{n} + 1) \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto $\boldsymbol{n} + 1 \in \boldsymbol{K}$.

Por el principio de inducción matemática, se tiene que $\boldsymbol{K} = \mathbb{N}$. $\blacksquare$

Lema 3. Si $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N} - \{1\}$, entonces $\boldsymbol{n} - 1 \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $\boldsymbol{K} \coloneqq \{\, \boldsymbol{n} - 1 \in \mathbb{R} \mid \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \,\}$.

Como $1 \in \mathbb{N}$, entonces $2 \coloneqq 1 + 1 \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto $1 \in \boldsymbol{K}$.

Si ahora $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{K}$, entonces $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n} - 1$ para algún $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$; por lo tanto $\boldsymbol{m} + 1 = (\boldsymbol{n} + 1) - 1$, pero como $\boldsymbol{n} + 1 \in \mathbb{N}$, entonces $\boldsymbol{m} + 1 \in \boldsymbol{K}$.

Por el principio de inducción matemática, se tiene que $\boldsymbol{K} = \mathbb{N}$. ■

Lema 4. Para cualquier $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, el conjunto $\boldsymbol{K_n} \coloneqq \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{N} \mid \boldsymbol{n} < \boldsymbol{x} \,\}$ tiene un elemento minimal. Además:

$$\min_{x \in \mathbb{N}} \boldsymbol{K_n} = \boldsymbol{n} + 1$$

Demostración. Sea $\boldsymbol{K} \subseteq \mathbb{N}$ el conjunto de todos los $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ para los cuales la afirmación del lema se cumple. Hay que demostrar que $\boldsymbol{K} = \mathbb{N}$.

1) Sea $\boldsymbol{M} \coloneqq \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{N} \mid \boldsymbol{x} = 1 \text{ ó } 2 \le \boldsymbol{x} \,\}$. Por la definición de este conjunto se tiene que $1 \in \boldsymbol{M}$.

Ahora, si $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{M}$, entonces ó $\boldsymbol{m} = 1$ y, por lo tanto $\boldsymbol{m} + 1 = 2 \in \boldsymbol{M}$;
ó $2 \le \boldsymbol{m}$, y entonces $2 \le \boldsymbol{m} + 1 \in \boldsymbol{M}$.

En ambos casos $\boldsymbol{m} + 1 \in \boldsymbol{M}$, por lo tanto $\boldsymbol{M} = \mathbb{N}$.

Significa que, si $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N} - \{1\}$, entonces $2 \le \boldsymbol{n}$, es decir, que en realidad

$$\min_{x \in \mathbb{N}} \{1 < \boldsymbol{x}\} = 2. \text{ Así pues, } 1 \in \boldsymbol{K}.$$

2) Hay que demostrar ahora, que si $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{K}$, entonces $\boldsymbol{n} + 1 \in \boldsymbol{K}$.

En primer lugar, si $\boldsymbol{x} \in \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{N} \mid \boldsymbol{n} + 1 < \boldsymbol{x} \,\}$, entonces $\boldsymbol{x} - 1 \eqqcolon \boldsymbol{y} \in \{\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{N} \mid \boldsymbol{n} < \boldsymbol{y} \,\}$, porque ningún número natural es menor que 1, por lo tanto

$$\boldsymbol{n} + 1 < \boldsymbol{x} \implies 1 < \boldsymbol{x} \implies 1 \neq \boldsymbol{x} \implies \boldsymbol{x} - 1 \eqqcolon \boldsymbol{y} \in \mathbb{N}.$$

Si $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{K}$, entonces $\min\limits_{y \in \mathbb{N}} \{\boldsymbol{n} < \boldsymbol{y}\} = \boldsymbol{n} + 1$, es decir, $\boldsymbol{x} - 1 \ge \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{n} + 1$, esto es $\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{n} + 2$. Se tiene entonces,

$$\boldsymbol{x} \in \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{N} \mid \boldsymbol{n} + 1 < \boldsymbol{x} \,\} \implies \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{n} + 2.$$

Por lo tanto, $\min\limits_{x \in \mathbb{N}} \{\, \boldsymbol{n} + 1 < \boldsymbol{x} \,\} = \boldsymbol{n} + 2$, es decir, $\boldsymbol{n} + 1 \in \boldsymbol{K}$. Por inducción matemática se tiene entonces que $\boldsymbol{K} = \mathbb{N}$. ■

Corolario 1. $\forall\, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} \quad \boldsymbol{n} < \boldsymbol{m} \implies \boldsymbol{n} + 1 \le \boldsymbol{m}$

Corolario 2. $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{n} + 1$ es el siguiente de $\boldsymbol{n}$ en $\mathbb{N}$.

Esto significa que si $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, entonces, $\nexists\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{N} \mid \boldsymbol{n} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{n} + 1$.

Corolario 3. $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} - \{1\}$ se tiene que $\boldsymbol{n} - 1 \in \mathbb{N}$ y el número $\boldsymbol{n} - 1$ es inmediatamente anterior a $\boldsymbol{n}$.

Esto significa que si $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N} - \{1\}$, entonces, $\nexists\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{N} \mid \boldsymbol{n} - 1 < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{n}$.

Corolario 4. Todo subconjunto $\boldsymbol{K} \subseteq \mathbb{N}$ no vacío de números naturales tiene un primer elemento.

Sea $\boldsymbol{K} \subseteq \mathbb{N}$. Si $1 \in \boldsymbol{K}$, 1 es el primer elemento de $\boldsymbol{K}$, puesto que $1 \le \boldsymbol{n} \quad \forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.

Supongamos entonces, que $1 \notin \boldsymbol{K}$, es decir, que $1 \in \mathbb{N} - \boldsymbol{K} =: \boldsymbol{K}'$. Entonces deberá encontrarse un número natural $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{K}'$, el cual $\forall\ \boldsymbol{m} \in \mathbb{N} \mid \boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{K}'$ y $\boldsymbol{m} + 1 \in \boldsymbol{K}$. Si no existiera un $\boldsymbol{n}$ con esas características, entonces se tendría $1 \in \boldsymbol{K}'$ y que $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{K}'$, por lo que también se debería tener $\boldsymbol{m} + 1 \in \boldsymbol{K}'$ y por inducción se tendría que $\boldsymbol{K}' = \mathbb{N}$. Pero esto último es posible sólo si $\mathbb{N} - \boldsymbol{K}' = \boldsymbol{K} = \emptyset$.

El número $\boldsymbol{n} + 1 \in \boldsymbol{K}$ así encontrado será primer elemento del conjunto $\boldsymbol{K}$, puesto que, como se ha visto, $\nexists\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K} \mid \boldsymbol{n} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{n} + 1$. ■

Las propiedades de los números naturales hasta aquí demostradas no están ligadas con el axioma de continuidad.

Teorema 3.2. Todo conjunto no vacío $\boldsymbol{K} \subseteq \mathbb{N}$ de números naturales acotado superiormente tiene un elemento máximo $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{max}\ \boldsymbol{K}$.

Demostración. Como $\boldsymbol{K} \subseteq \mathbb{N}$ es acotado superiormente, entonces tiene un extremo superior $\boldsymbol{sup}\ \boldsymbol{K} =: \boldsymbol{s} \in \mathbb{R}$ único. Por la definición de extremo superior, $\exists\ \boldsymbol{m} \in \mathbb{N}$, tal que $\boldsymbol{s} - 1 < \boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{s}$. Entonces $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{max}\ \boldsymbol{K}$, ya que $\boldsymbol{s} < \boldsymbol{m} + 1$ y como $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, tal que $\boldsymbol{m} < \boldsymbol{n}$, implica $\boldsymbol{c} < \boldsymbol{n}$, entonces $\boldsymbol{n} \notin \boldsymbol{K}$. Es claro que $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{s}$, pues si $\boldsymbol{m} < \boldsymbol{s}$, entonces $\exists\ \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}$, tal que $\boldsymbol{m} < \boldsymbol{r} < \boldsymbol{s}$, lo que significa que $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{m} = \boldsymbol{max}\ \boldsymbol{K}$ es un mayorante de $\boldsymbol{K}$ y por lo tanto contradice que $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{sup}\ \boldsymbol{K}$. ■

Teorema 4.2. El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales no es acotado superiormente.

Demostración. Supóngase lo contrario. Es decir, que $\mathbb{N}$ es acotado superiormente. Entonces $\exists\ \boldsymbol{s} \in \mathbb{R} \mid \boldsymbol{s} = \boldsymbol{sup}\ \mathbb{N}$. Por lo tanto $\boldsymbol{c} - 1$ no es mayorante de $\mathbb{N}$, esto es $\exists\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} \mid \boldsymbol{s} - 1 < \boldsymbol{n} \leq \boldsymbol{s}$, es decir, $\boldsymbol{s} < \boldsymbol{n} + 1$, pero $\boldsymbol{n} + 1 \in \mathbb{N}$, lo que contradice que $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{sup}\ \mathbb{N}$. ■

Corolario. El conjunto $\mathbb{N}$ es un subconjunto confinal del conjunto $\mathbb{R}$. Es decir,

$$\forall\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\ \exists\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} \mid \boldsymbol{x} < \boldsymbol{n}.$$

Demostración. De lo contrario $\mathbb{N}$ sería superiormente acotado. ■

Corolario (**Propiedad Arquimediana**). $\forall\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^+\ \forall\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}\ \exists\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} \mid \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{x} > \boldsymbol{y}$.

Demostración. Por el corolario anterior, se tiene que

$$\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R} \implies \exists\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} \mid \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}} < \boldsymbol{n}, \text{ esto es } \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{x} > \boldsymbol{y}. ■$$

Teorema 5.2. Sea $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{r} \in \mathbb{R} \mid \boldsymbol{r} \leq \boldsymbol{x} < \boldsymbol{r} + \dfrac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{n}} \quad \forall\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$. Entonces $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}$.

Demostración. Supóngase que $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{x}$. Entonces $\exists\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} \mid \boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}) > \boldsymbol{y}$, esto es, $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{r} + \dfrac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{n}}$, lo que contradice la hipótesis. ■

Corolario. Sea $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \boldsymbol{x} < 1/\boldsymbol{n} \quad \forall\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$. Entonces $\boldsymbol{x} = 0$.

Corolario. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} \mid 0 < 1/\boldsymbol{n} < \varepsilon$.

Demostración. Por el principio de Arquímedes $\exists\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} \mid 1 < \varepsilon\,\boldsymbol{n}$, es decir, $0 < 1/\boldsymbol{n} < \varepsilon$. ■

Teorema 6.2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ conjunto no vacío de números reales.

1) Si $\exists$ ***sup*** A, entonces $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x \in A \mid x > \sup A - \varepsilon$
2) Si $\exists$ ***inf*** A, entonces $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x \in A \mid x < \inf A + \varepsilon$.

Demostración. 1) Supongamos que $x \leq \sup A - \varepsilon\ \ \forall\, x \in A$. Entonces $\sup A - \varepsilon$ es un mayorante de A menor que el supremo $\sup A$.

La demostración de 2) es análoga. ■

Teorema 7.2. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ dos conjuntos no vacíos de números reales. Sea

$$A + B \coloneqq \{\, x + y \mid x \in A \text{ y } y \in B \,\}$$

1) Si A y B son acotados superiormente, entonces $\sup (A + B) = \sup A + \sup B$
2) Si A y B son acotados inferiormente, entonces $\inf (A + B) = \inf A + \inf B$

Demostración. Para cualquier elemento $c \in A + B$ se encuentran elementos $a \in A$ y $b \in B$, tales que $c = a + b$. Entonces $c \leq \sup A + \sup B$, lo que significa que $\sup A + \sup B$ es una cota superior de $A + B$ y, por lo tanto $\sup (A + B) \leq \sup A + \sup B$.

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, a \in A$ y $b \in B$, tales que $a > \sup A - \varepsilon/2$ y $b > \sup B - \varepsilon/2$.

Por lo tanto $a + b > \sup A + \sup B - \varepsilon$.

Se tiene entonces que $\sup (A + B) \leq a + b + \varepsilon \leq \sup (A + B) + \varepsilon$, es decir,

$$\sup (A + B) \leq \sup A + \sup B \leq \sup (A + B) + \varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

La demostración de 2) es análoga. ■

§ 5.2 El Conjunto de los Números Enteros

Definición 4.2. Se llama conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, al conjunto

$$\mathbb{Z} \coloneqq \{ x \in \mathbb{R} \mid m = n + x \text{ donde } m, n \in \mathbb{N} \}$$

Nótese que el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ es la unión del conjunto $\mathbb{N}$ de todos los números naturales, el $\{0\}$ y el conjunto $\mathbb{Z}^-$ de todos los inversos aditivos de los números naturales, es decir, $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$.

Lema 5. Las operaciones de adición y multiplicación de números reales son cerradas en el conjunto de los números enteros.

Demostración. Sean m, $n \in \mathbb{Z}$ dos números enteros cualesquiera. Existen sólo cuatro posibilidades:

1) $m = 0$ ó $n = 0$. En este caso la suma $m + n$ es igual a un número no nulo o a 0 si ambos m y n son nulos, y el producto siempre será cero, por lo que $m + n \in \mathbb{Z}$ y $m\,n \in \mathbb{Z}$.
2) $m, n \in \mathbb{N}$. En este caso $m + n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ y $m\,n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
3) $m, n \in \mathbb{Z}^-$. En este caso $m + n \in \mathbb{Z}^- \subset \mathbb{Z}$ y $m\,n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
4) $m \in \mathbb{N}$ y $n \in -\mathbb{N}$ ó bien $n \in \mathbb{N}$ y $m \in -\mathbb{N}$. En este caso se tiene que ó $m + n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ó $m + n \in \mathbb{Z}^- \subset \mathbb{Z}$. Además $-(m\,n) \in \mathbb{N}$, con lo que se tiene, $m\,n \in \mathbb{Z}^- \subset \mathbb{Z}$.■

Si para dos números n, $k \in \mathbb{Z}$, el número $m = n\,k^{-1} \in \mathbb{Z}$, es decir, $k\,m = n$, en donde $m \in \mathbb{Z}$; se dice que el número n es divisible por el número k ó que n es múltiplo de k y k es divisor de n.

Un número $p \in \mathbb{N}$ se llama número primo, si tiene exactamente dos divisores distintos en $\mathbb{N}$. Dos números p, $q \in \mathbb{N}$ se llaman primos relativos si su máximo común divisor (p, q) es 1.

El principio de Arquímedes en los números enteros se puede formular como sigue:

Propiedad Arquimediana. $\forall\, x \in \mathbb{R}^+ \;\forall\, y \in \mathbb{R}\; \exists!\, n \in \mathbb{Z} \mid (n - 1)\,x \le y < n\,x$.

Lema 6. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}\;\; \exists\, r \in \mathbb{Q} \mid a < r < b$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N} \mid 0 < \dfrac{1}{n} < b - a$. Por el principio de Arquímedes, se puede encontrar un entero $m \in \mathbb{Z}$, tal que $\dfrac{m-1}{n} \le a < \dfrac{m}{n}$. Entonces $\dfrac{m}{n} < b$, pues si no fuera así, se tendría $\dfrac{m-1}{n} \le a < b < \dfrac{m}{n}$, de donde se seguiría $\dfrac{1}{n} > b - a$. Así pues $r = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ y $a < \dfrac{m}{n} < b$. ■

Lema 7. $\forall\, x \in \mathbb{R}\; \exists!\, n \in \mathbb{Z} \mid n \le x < n + 1$. El número $n \eqqcolon [x] \in \mathbb{Z}$ así obtenido, es llamado parte entera de $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Se sigue directamente del principio de Arquímedes. ■

El número $(x) \coloneqq x - [x]$ es llamado parte fraccionaria de x. Nótese que $(x) \ge 0$.

Divisibilidad

Definición 5.2. El número $b \in \mathbb{Z}$ es divisible por el número $a \in \mathbb{Z}$, lo que se escribe como $a|b$, si $\exists\, m \in \mathbb{Z}$, tal que $b = a\, m$. En este caso se dice que a divide a b o a es un divisor de b y que b es un múltiplo de a.

Definición 6.2. El número $p \in \mathbb{N}$ se llama número primo, si tiene un único divisor distinto de 1, a saber el mismo p. Un número distinto de la unidad que no es primo se llama compuesto.

Veremos solamente la divisibilidad en $\mathbb{N}$.

Divisibilidad por un número primo $p > 2$ y $p \neq 5$. El método es válido para gran cantidad de impares no terminados en 5.

$$N \text{ es divisible por } n \iff N = \sum_{k=0}^{n} 10^k a_k = \sum_{k=1}^{n} 10^k a_k + a_0 = nm \text{ donde } m \text{ es un entero.}$$

Hay que sumar a ambos miembros el mínimo múltiplo de p que termine en 9 y multiplicado por a_0

Supongamos que S es el mínimo múltiplo de p que termina en 9.

Entonces $S + 1$ es múltiplo de 10. Supongamos que $S + 1 = 10s$ y $S = ps$. Se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} 10^k a_k + (S + 1)a_0 = mp + S\, a_0 = \sum_{k=1}^{n} 10^k a_k + 10s\, a_0 = mp + ps'\, a_0 \quad \text{, es decir}$$

$$10\left(\sum_{k=1}^{n} 10^{k-1} a_k + s\, a_0\right) = p\,(m + s'a_0).$$

Tenemos que el miembro derecho de la igualdad es divisible por 10, pero p es primo por lo que $(m + s'a_0)$ debe ser divisible por 10. Denotamos $m + s'a_0 = 10m_1$, y obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} 10^{k-1} a_k + s\, a_0 = pm_1$$

es decir, para que N sea divisible por p hay que multiplicar el último dígito de N por s y sumarlo al número formado por el resto de los dígitos. El resultado debe ser un múltiplo de p.

Análogamente, se puede restar de ambos miembros el mínimo múltiplo de p que termine 1 multiplicado por a_0

Supongamos que R es el mínimo múltiplo de p que termina en 1

Entonces $R - 1$ es múltiplo de 10. Supongamos que $R - 1 = 10r$ y $R = p\, r'$. Se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} 10^k a_k - (R - 1)a_0 = nm - Ra_0 = \sum_{k=1}^{n} 10^k a_k - 10ra_0 = pm - pr'a_0, \text{ es decir}$$

$$10\left(\sum_{k=1}^{n} 10^{k-1} a_k - ra_0\right) = n\,(m - r'a_0).$$

Tenemos que el miembro derecho de la igualdad es divisible por 10, pero n es primo por lo que $(m - r'a_0)$ debe ser divisible por 10. Denotamos $m + s'a_0 = 10m_1$, y obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} 10^{k-1}\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{r}\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{p}\boldsymbol{m}_1$$

es decir, para que ***N*** sea divisible por ***p*** hay que multiplicar el último dígito de ***N*** por ***r*** y restarlo del número formado por el resto de los dígitos. El resultado debe ser un múltiplo de ***p***.

Como ejemplo se tiene la divisibilidad por 3. La divisibilidad por 9 es parecida.

Divisibilidad por 3:

N es divisible por 3 $\iff$ $\boldsymbol{N} = \sum_{k=0}^{n} 10^{k}\boldsymbol{a}_k = \sum_{k=1}^{n} 10^{k}\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_0 = 3\boldsymbol{m}$ donde ***m*** es un entero.

Al sumar a ambos miembros $9\boldsymbol{a}_0$ ó restar $21\boldsymbol{a}_0$, se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} 10^{k}\boldsymbol{a}_k + 10\boldsymbol{a}_0 = 3\boldsymbol{m} + 9\boldsymbol{a}_0, \text{ es decir, } 10\left(\sum_{k=1}^{n} 10^{k-1}\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_0\right) = 3\,(\,\boldsymbol{m} + 3\boldsymbol{a}_0\,)$$

Tenemos que el miembro derecho de la igualdad es divisible por 10, pero 3 es primo por lo que $(\boldsymbol{m} + 3\boldsymbol{a}_0)$ debe ser divisible por 10. Denotamos $\boldsymbol{m} + 3\boldsymbol{a}_0 = 10\boldsymbol{m}_1$, y obtenemos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} 10^{k-1}\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_0\right) = 3\boldsymbol{m}_1$$

Repitiendo sucesivamente la misma operación se obtiene

$\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{a}_k = 3\boldsymbol{m}_n$, es decir, para que ***N*** sea divisible por 3 hay que sumar los dígitos de ***N*** y el resultado debe ser un múltiplo de 3.

Divisibilidad por 7:

N es divisible por 7 $\iff$ $\boldsymbol{N} = \sum_{k=0}^{n} 10^{k}\boldsymbol{a}_k = \sum_{k=1}^{n} 10^{k}\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_0 = 7\boldsymbol{m}$ donde ***m*** es un entero.

Hay que restar a ambos miembros el mínimo múltiplo de 7 que termine en 1 multiplicado por $\boldsymbol{a}_0$, es decir, réstese a ambos miembros $21\boldsymbol{a}_0$. Se tiene entonces

$$\sum_{k=1}^{n} 10^{k}\boldsymbol{a}_k - 20\boldsymbol{a}_0 = 7\boldsymbol{m} - 21\boldsymbol{a}_0, \text{ es decir, } 10\left(\sum_{k=1}^{n} 10^{k-1}\boldsymbol{a}_k - 2\,\boldsymbol{a}_0\right) = 7\,(\boldsymbol{m} - 3\boldsymbol{a}_0).$$

Tenemos que el miembro derecho de la igualdad es divisible por 10, pero 7 es primo por lo que $(\boldsymbol{m} - 3\boldsymbol{a}_0)$ debe ser divisible por 10. Denotamos $\boldsymbol{m} - 3\boldsymbol{a}_0 = 10\boldsymbol{m}_1$, y obtenemos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} 10^{k-1}\boldsymbol{a}_k - 2\,\boldsymbol{a}_0\right) = 7\boldsymbol{m}_1$$

es decir, para que ***N*** sea divisible por 7 hay que multiplicar el último dígito de ***N*** por 2 y restarlo del número formado por el resto de los dígitos. El resultado debe ser un múltiplo de 7.

§ 6.2 El Conjunto de los Números Racionales

Definición 7.2. Se llama conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, al conjunto

$$\mathbb{Q} := \{\, x \in \mathbb{R} \mid mx = n \text{ donde } m, n \in \mathbb{Z} \;\; m \neq 0 \,\}.$$

Nótese que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es el conjunto de todos los números de la forma mn^{-1}, en donde $m, n \in \mathbb{Z}$. Se denota el producto $m\,n^{-1}$ como $\frac{m}{n}$.

Lema 8. Las operaciones de adición y multiplicación de números reales son cerradas en el conjunto de los números racionales.

El Conjunto de los Números Irracionales

Definición 8.2. Se llama conjunto de los números irracionales $\mathbb{Q}'$, al conjunto de los números reales que no son racionales.

$$\mathbb{Q}' := \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q} \,\}.$$

Teorema 8.2. Para todo número real $r \geq 0$ existe un único número real $x \geq 0$ (llamado raíz cuadrada de r), tal que, $xx =: x^2 = r$.

Demostración. Si $r = 0$, entonces $x = 0$, es su única raíz cuadrada. Supóngase entonces que $r > 0$.

Sea $X := \{\, x \in \mathbb{R}^+ \mid x^2 < r \,\}$ y sea $Y := \{\, y \in \mathbb{R}^+ \mid y^2 > r \,\}$.

$$(r+1)^2 > r \;\text{ y }\; r^2 < r\,(r+1)^2 \Longrightarrow \frac{r}{r+1} \in X \;\text{ y }\; r+1 \in Y, \text{ por lo que } X \neq \varnothing \text{ y } Y \neq \varnothing.$$

Como $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^+ \;\; x < y \iff x^2 < y^2$, entonces cualquier elemento de X es menor que cualquier elemento de Y. Por el axioma de continuidad se tiene que $\exists\, c \in \mathbb{R} \mid x \leq c \leq y \;\; \forall x \in X$ y $\forall y \in Y$, por ejemplo, $c = \sup X$. Nótese que $c \geq \frac{r}{1+r} > 0$. Hay que demostrar que $c^2 = r$.

Si $c^2 > r$, entonces pongamos $b := c - \frac{c^2 - r}{2c}$, por lo que $0 < b < c$ y

$b^2 = c^2 - (c^2 - r) + \frac{(c^2 - r)^2}{4c^2} = r + \frac{(c^2 - r)^2}{4c^2} > r$. Entonces se tiene que $b^2 > x^2 \;\forall\, x \in X$ o, lo que es equivalente $b > x \;\forall\, x \in X$, lo que nos dice que b es un mayorante de X. Pero $b < c = \sup X$. Se ha llegado a una contradicción.

Si $c^2 < r$, entonces, como $c > 0$, se puede encontrar un número $b < c$, positivo, tal que $b < \frac{r - c^2}{3c}$. Se tiene, por lo tanto

$(b + c)^2 = c^2 + b(2c + b) < c^2 + 3bc < c^2 + (r - c^2) = r$. Significa que $b + c \in X$. Sin embargo, $b + c > c = \sup X$. Se ha llegado a una contradicción, pues c es un mayorante de X.

Por lo tanto, la única posibilidad es que $c^2 = r$. ■

Un ejemplo clásico nos muestra que $\mathbb{Q}' \neq \varnothing$. Este ejemplo es el número $\boldsymbol{s} = \sqrt{2}$, es decir, el número $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^+$ tal que $\boldsymbol{ss} =: \boldsymbol{s}^2 = 2$. Por el teorema anterior 2 tiene una raíz cuadrada $\boldsymbol{s} = \sqrt{2}$. Mostraremos que ***s*** no es un número racional.

Supóngase lo contrario, es decir, que $\boldsymbol{s} = \sqrt{2} = \dfrac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}$, en donde ***m*** y ***n*** son primos relativos, es decir $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) = 1$. Entonces $\boldsymbol{m}^2 = 2\boldsymbol{n}^2$, por lo que ***m*** es un número par, es decir, que existe un número $\boldsymbol{r} \in \mathbb{N}$ tal que $\boldsymbol{m} = 2\boldsymbol{r}$. Substituyendo, se tiene que $(2\boldsymbol{r})^2 = 2\boldsymbol{n}^2$, esto es, $2\boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{n}^2$, por lo que ***n*** también es un número par, lo que contradice que ***m*** y ***n*** sean primos relativos. ■

§ 7.2 UN NÚMERO DADO CON UNA SUCESIÓN DE APROXIMACIONES.

Con sucesiones de números racionales en sí, se puede representar todo el conjunto de los números reales, construyendo después un modelo de análisis matemático de lo que hace la gente con los números, sin imaginarse su descripción axiomática.

Si se sustituye un número por su sucesión de sus valores aproximados, entonces tratando de sumar dos números, se deberán sumar las sucesiones de sus valores aproximados, la nueva sucesión así obtenida se debe considerar como un nuevo número, llamado suma de los dos primeros. Sin embargo, surge la pregunta: ¿es o no un número esta última sucesión?. Otra pregunta surge cuando resulta que diferentes sucesiones podrían ser sucesiones de valores aproximados de un mismo número. Con estas preguntas A. L. Cauchy dió una descripción exacta y realizó todo el programa de la construcción de los números reales.

Veamos un método que permite de forma única para cada número real, construir una sucesión de aproximaciones racionales, que nos lleva al sistema posicional de escritura numérica.

Lema 9. Si se fija un número $q > 1$, entonces para cualquier número positivo $x \in \mathbb{R}$ existe un único número entero $m \in \mathbb{Z}$, tal que

$$q^k \leq x < q^{k+1}$$

Demostración. El conjunto $S \coloneqq \{ q^{m+1} \mid m \in \mathbb{Z}, q > 1 \}$ no es acotado superiormente, pues de lo contrario tendría un extremo superior $s \coloneqq \sup S$, con lo cual, por la definición de extremo superior, se encontraría un número natural $n \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{s}{q} < q^{n+1} \leq s$. Pero entonces se tendría que $q^{n+2} < s$, lo que contradice que s sea el extremo superior.

Como $q > 1$, entonces $q^n < q^m$ para $n < m$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$, por lo cual se ha demostrado entonces que para cualquier número $c \in \mathbb{R}$ se puede encontrar un número natural $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que por cada número natural $n + 1 > n_0$, se tenga $c < q^{n+1}$.

De aquí se deduce que para cualquier $\varepsilon > 0$, se encuentra un número $m_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todos los números naturales $m + 1 > m_0$, se tiene $\frac{1}{q^{m+1}} < \varepsilon$. Para esto es suficiente hacer $c \coloneqq \frac{1}{\varepsilon}$, y $n_0 \coloneqq m_0$, Entonces $\frac{1}{\varepsilon} < q^{m+1}$ cuando $m + 1 > m_0$.

Se tiene así que el conjunto $I \coloneqq \{ m \in \mathbb{Z} \mid x < q^{m+1}, x > 0 \}$ es acotado inferiormente, por lo que este conjunto tiene un ínfimo $k + 1 \coloneqq \inf I$, que evidentemente será el número buscado, para el cual $q^k \leq x < q^{k+1}$.

La unicidad del número k se sigue de el hecho que si $m, n \in \mathbb{Z}$, por ejemplo $m < n$, entonces $m + 1 \leq n$ y por lo cual, si $q > 1$, entonces $q^{m+1} \leq q^n$. De esta observación queda visto que las desigualdades $q^m \leq x < q^{m+1}$ y $q^n \leq x < q^{n+1}$, de las cuales se sigue $q^k \leq x < q^{k+1}$, son incompatibles para $m \neq n$. ■

Definición 9.2. El número k que satisface la desigualdad $q^k \leq x < q^{k+1}$, se llama orden del número x, con un número fijo q.

Por el principio de Arquímedes, se encuentra un único número natural $\alpha_k \in \mathbb{N}$, tal que

$$\alpha_k q^k \leq x < \alpha_k q^k + q^k$$

Considerando la desigualdad $q^k \le x < q^{k+1}$, se puede afirmar que $\alpha_k \in \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$.

Repetimos el procedimiento partiendo hora en la desigualdad $\alpha_k q^k \le x < \alpha_k q^k + q^k$. Por el principio de Arquímedes, se encuentra un único número natural $\alpha_{k-1} \in \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$, tal que

$$\alpha_k q^k + \alpha_{k-1} q^{k-1} \le x < \alpha_k q^k + \alpha_{k-1} q^{k-1} + q^{k-1}.$$

Después de n pasos similares, se obtiene que

$$\alpha_k q^k + \alpha_{k-1} q^{k-1} + \dots + \alpha_{k-n} q^{k-n} \le x < \alpha_k q^k + \alpha_{k-1} q^{k-1} + \dots + \alpha_{k-n} q^{k-n} + q^{k-n}.$$

Con este algoritmo, a cada número positivo x se le hace corresponder una sucesión de números $\alpha_k\alpha_{k-1} \dots \alpha_{k-n} \dots$ del conjunto $\{0, 1, 2, \dots, q-1\}$, o bien, una sucesión de números racionales $r_n \in \mathbb{Q}$, que tienen la forma

$$r_n := \alpha_k q^k + \alpha_{k-1} q^{k-1} + \dots + \alpha_{k-n} q^{k-n}, \quad (*)$$

y que cumplen la desigualdad

$$r_n \le x < r_n + \frac{1}{q^{n-k}}. \quad (**)$$

En otras palabras, se construyen las aproximaciones inferiores y superiores del número x mediante sucesiones especiales de números racionales definidas como se vió anteriormente por la igualdad $r_n := \alpha_k q^k + \alpha_{k-1} q^{k-1} + \dots + \alpha_{k-n} q^{k-n}$. Los símbolos $\alpha_k \alpha_{k-1} \dots \alpha_{k-n} \dots$ son cifras de toda la sucesión $\{r_n\}$. Para obtener de nuevo la sucesión es necesario fijar de alguna manera el orden k del número x.

Condicionalmente, cuando $k \ge 0$, después de α_0 se acostumbra a escribir un punto; cuando $k < 0$, a la izquierda de se escriben ceros y después del último se escribe un punto.

Ejemplo. Cuando $q = 10$, se tiene

$$2718.28 := 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2}.$$
$$3.14159 := 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} + 9 \cdot 10^{-5}.$$

Así el significado de las cifras $\alpha_k \alpha_{k-1} \dots \alpha_{k-n}, \dots$ dependen de la posición que estas tengan con relación al punto.

De la desigualdad $r_n \le x < r_n + \frac{1}{q^{n-k}}$ se sigue que a números distintos $x \ne x'$ les corresponden sucesiones distintas $\{r_n\} \ne \{r'_n\}$ y por lo tanto diferentes símbolos $\alpha_k \alpha_{k-1} \dots \alpha_{k-n} \dots, \ne \alpha'_k \alpha'_{k-1} \dots \alpha'_{k-n} \dots$.

Surge entonces la pregunta: a cada símbolo de la forma $\alpha_k \alpha_{k-1} \dots \alpha_0 \dots$, le corresponde o no algún número $x \in \mathbb{R}$. La respuesta es negativa.

Nótese que, según el algoritmo, en la sucesiva obtención de los números $\alpha_{k-n} \in \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$ no puede suceder que todos ellos, empezando de alguno, resulten iguales a $q-1$.

En realidad, cuando $n > r$

$$r_n = \alpha_k q^k + \dots + \alpha_{k-r} q^{k-r} + (q-1) q^{k-r-1} + \dots + (q-1) q^{k-n}. \text{ es decir, } r_n = r_r + \frac{1}{q^{r-k}} - \frac{1}{q^{n-k}},$$

entonces, como $r_n := \alpha_k q^k + \alpha_{k-1} q^{k-1} + \dots + \alpha_{k-n} q^{k-n}$, se tiene

$$r_r + \frac{1}{q^{r-k}} - \frac{1}{q^{n-k}} \le x < r_r + \frac{1}{q^{r+k}}.$$

y para cualquier $n > r$, se tiene

$$0 < r_r + \frac{1}{q^{r-k}} - x < \frac{1}{q^{n-k}}.$$

lo cual, como lo afirma el lema, no puede ser.

Es necesario también señalar que, si entre los números $\alpha_{k-r-1} \ldots \alpha_{k-n} \ldots$, hay aunque sea uno menor que $q - 1$, entonces, en lugar de $r_n = r_r + \frac{1}{q^{r-k}} - \frac{1}{q^{n-k}}$, se puede escribir

$$r_n < r_r + \frac{1}{q^{r-k}} - \frac{1}{q^{n-k}}, \text{ es decir, } r_n + \frac{1}{q^{n-k}} < r_r + \frac{1}{q^{r-k}}. \; (***)$$

Ahora nos encontramos en la posibilidad de demostrar que cualquier símbolo $\alpha_k \ldots \alpha_0 \ldots$, compuesto de números $\alpha_k \in \{0, 1, 2, \ldots, q-1\}$, en los que no importa que tan lejos, se encuentran números diferentes de $q - 1$, le corresponde algún número $x \ge 0$.

Efectivamente, por cada símbolo $\alpha_{k-r-1} \ldots \alpha_{k-n} \ldots$, construyamos una sucesión $\{r_n\}$ de números de la forma $r_n := \alpha_k q^k + \alpha_{k-1} q^{k-1} + \ldots + \alpha_{k-n} q^{k-n}$. Como $r_0 \le r_1 \le \ldots \le r_n \le \ldots$, además, como

$$r_n = r_r + \frac{1}{q^{r-k}} - \frac{1}{q^{n-k}}, \text{ y } r_n + \frac{1}{q^{n-k}} < r_r + \frac{1}{q^{r-k}},$$

se tiene entonces

$$r_0 \le r_1 \le \ldots < \ldots \le r_n + \frac{1}{q^{n-k}} \le \ldots \le r_1 + \frac{1}{q^{1-k}} \le r_0 + \frac{1}{q^{-k}}.$$

El símbolo de desigualdad estricta se debe de comprender como sigue: Cualquier elemento de la sucesión izquierda es menor que cualquier elemento de la sucesión derecha. Lo cual se deduce de la desigualdad (***)

Si tomamos $x = \min\limits_{n\in\mathbb{N}} r_n \left(\min\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(r_n + \frac{1}{q^{n-k}} \right) \right)$, entonces la desigualdad r_n satisfará las desigualdades (*) y (**), lo que significa que el símbolo $\alpha_k \ldots \alpha_{k-n}$ corresponde al número encontrado $x \in \mathbb{R}$. De esta forma a cada número positivo $x \in \mathbb{R}$, en forma biunívoca, le corresponde un símbolo de la forma $\alpha_k \ldots \alpha_0. \ldots$, si $k \ge 0$, ó $0.0\ldots0\alpha_k$, si $k < 0$.

Al número $x < 0$ se le hace corresponder con signo menos, el símbolo del número positivo $-x$. Finalmente, al número 0 se le hace corresponder el símbolo 0.0…0….

De esta forma queda concluida la construcción del q-ario sistema posicional de escritura de los números reales. El sistema más usado es el sistema decimal ($q = 10$), y en la técnica, el sistema binario ($q = 2$).

Otro método de construcción de los números reales a partir de los números racionales, pertenece al matemático alemán R. Dedekind, quien hace corresponder a cada número real una partición de $\mathbb{Q}$ (que llamó cortadura) en dos conjuntos disjuntos A y B, tales que $a \le b \; \forall \; a \in A$ y $\forall \; b \in B$. Con este método se utiliza el axioma de continuidad llamado Axioma de Dedekind.

§ 8.2 La Desigualdad de Bernoulli y El Binomio de Newton

El factorial $n!$ de un número natural $n \in \mathbb{N}$, se define como $n! \coloneqq n\,(n-1)!$ y $0! \coloneqq 1$

En particular, se tiene $n! = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$.

Lema . Para $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\binom{n}{k} \coloneqq \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$, en donde $0 \le k \le n$.

Demostración. Para $0 \le k \le n-1$, se tiene

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(n-k)!k!}+\frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k(k-1)!}+\frac{n!}{(n+1-k)(n-k)!(k-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,(k-1)!}\left(\frac{1}{n+1-k}+\frac{1}{k}\right) = \frac{n!}{(n-k)!\,(k-1)!}\,\frac{n+1}{(n+1-k)k} = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!} = \binom{n+1}{k}. \blacksquare$$

Teorema 40.1. (Binomio de Newton). $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k \text{ , en donde } \binom{n}{k} \coloneqq \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Demostración. Por el método de inducción matemática, para $n = 1$ se tiene $a + b = a + b$, puesto que $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$. Supongamos que la fórmula de Newton es valida para $n \in \mathbb{N}$. Hay que demostrar que entonces es valida para $n + 1$.

Puesto que $\binom{n+1}{0} = \binom{n}{0} = 1$ y $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ para todo número natural n, entonces

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k\,(a+b) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1} =$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1}\, b^0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right) a^{n+1-k}\, b^k + \binom{n}{n} a^0\, b^{n+1} =$$

$$= \binom{n+1}{0} a^{n+1}\, b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} a^{n+1-k}\, b^k + \binom{n+1}{n+1} a^0\, b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} a^{n-k}\, b^k = (a+b)^{n+1}. \blacksquare$$

Teorema 41.1. (Desigualdad de Bernoulli). $\forall\, x > -1$ y $n \in \mathbb{N}$ se cumple la desigualdad

$$1 + n\,x \le (1+x)^n$$

Demostración. Por el método de inducción matemática, para $n = 1$ se tiene $1 + x \le (1 + x)$.

Supongamos que la desigualdad de Bernoulli es valida para $n \in \mathbb{N}$. Hay que demostrar que entonces es valida para $n + 1$.

$$1 + (n+1)\,x \le 1 + (n+1)\,x + nx^2 = (1+nx)\,(1+x) \le (1+x)^n\,(1+x) = (1+x)^{n+1}. \blacksquare$$

§ 9.2 Mapeo Valor Absoluto

Valor absoluto. El mapeo abs: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, llamado se llama valor absoluto o módulo, queda definido por la igualdad abs(x) $:=$ | x |, en donde

$$|\,x\,| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El número $|\,x\,|$ se llama se llama valor absoluto o módulo del punto $x \in \mathbb{R}$. Directamente de la definición se sigue que $\forall\, a \in \mathbb{R}$ se tiene $|-a| = |\,a\,|$.

Propiedades del mapeo valor absoluto.

1) $\forall\, a \in \mathbb{R}$ se tiene $a \leq |\,a\,|$, $-a \leq |\,a\,|$ y , por lo tanto $-|\,a\,| \leq a \leq |\,a\,|$.
Si $a \geq 0$, entonces $|\,a\,| = a \geq -a$, en cambio, si $a \leq 0$, entonces $|\,a\,| = -a \geq a$. En cualquier caso se tiene que $a \leq |\,a\,|$.

2) Si $a \in \mathbb{R}$ y $r > 0$, entonces $|\,x - a\,| < r \iff a - r < x < a + r$
Supongamos primero que $|\,x - a\,| < r$. Como $-r \leq -|\,x - a\,| \leq x - a \leq |\,x - a\,| < r$, entonces se tiene $a - r < x < a + r$.

Recíprocamente, supongamos que $a - r < x < a + r$, es decir, $-r < x - a < r$.

Si $x - a \geq 0$, entonces $|\,x - a\,| = x - a < r$, (puesto que $x < a + r$), y
si $x - a < 0$, entonces $|\,x - a\,| = -(\,x - a\,) = a - x < r$, (puesto que $a - r < x$).
En cualquier caso, se tiene que $|\,x - a\,| < r$. ■

En particular, para $a = 0$, se tiene $|\,x\,| < r \iff -r < x < r$.

3) Desigualdad del triangulo. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ se tiene $|\,a + b\,| \leq |\,a\,| + |\,b\,|$.

Por la propiedad 1) se tiene que $-|\,a\,| \leq a \leq |\,a\,|$ y $-|\,b\,| \leq b \leq |\,b\,|$, de donde se tiene que $-(|\,a\,| + |\,b\,|) \leq a + b \leq |\,a\,| + |\,b\,|$, de donde, aplicando la propiedad 2), se obtiene la desigualdad $|\,a + b\,| \leq |\,a\,| + |\,b\,|$. ■

Si $a =: x - y$, $b =: y - z$, entonces $a + b = x - z$, y la desigualdad toma la forma

$|\,x - z\,| \leq |\,x - y\,| + |\,y - z\,|$, llamada desigualdad del triangulo.

4) $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ se tiene $|\,a - b\,| \geq |\,a\,| - |\,b\,|$.

Sea $x := a - b$ y $y := b$, por lo tanto $x + y = a$. Como $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene entonces, por la propiedad 4) que $|\,x + y\,| \leq |\,x\,| + |\,y\,|$, esto es, $|\,a - b\,| \geq |\,a\,| - |\,b\,|$. ■

5) $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ se tiene $|\,a\,| - |\,b\,| \leq |\,a \pm b\,| \leq |\,a\,| + |\,b\,|$.

$|\,a\,| - |\,b\,| = |\,a\,| - |\mp b| \leq |\,a - (\mp b)\,| = |\,a + (\pm b)\,| \leq |\,a\,| + |\pm b| = |\,a\,| + |\,b\,|$. ■

LA DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ

Si $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ y $b_1,\dots,b_n \in \mathbb{R}$, entonces $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$

Como $0 \leq \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k - b_k)^2 \;\; \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ se tiene $0 \leq \lambda^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - 2\,\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2$.

Tomando $\lambda := \dfrac{\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$, donde $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \neq 0$, se obtiene $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$. ∎

§ 10.2 ENTORNOS Ó VECINDADES.

Los términos entorno y vecindad, serán usados como sinónimos.

Vecindad de un punto. Para $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$ se define el conjunto

$$\mathbf{E}_{r_1,r_2}(a) := \,]a - r_1, a + r_2[\, = \{ x \in \mathbb{R} \mid -r_1 < x - a < r_2 \}$$

llamado entorno abierto ó vecindad abierta de $a \in \mathbb{R}$ con radios inferior $r_1 \in \mathbb{R}^+$ y superior $r_2 \in \mathbb{R}^+$.

En general, cualquier intervalo abierto que contiene a un punto $a \in \mathbb{R}$, se llama entorno abierto ó vecindad abierta de a y se denota como $\mathbf{E}(a)$. También se utilizarán las notaciones $\mathbf{U}(a)$ y $\mathbf{V}(a)$.

Denotaremos como $\mathscr{A}(a)$ a la familia de vecindades de un punto $a \in \mathbb{R}$.

Vecindad perforada de un punto. Cualquier vecindad $\mathbf{E}_{r_1,r_2}(a)$ de un punto $a \in \mathbb{R}$, de la que se excluye dicho punto a se llama vecindad perforada de a, y se denota como $\mathring{\mathbf{E}}_{r_1,r_2}(a)$. Es decir,

$$\mathring{\mathbf{E}}_{r_1,r_2}(a) := \mathbf{E}_{r_1,r_2}(a) - \{a\} = \{ x \in \mathbb{R} - \{a\} \mid -r_1 < x - a < r_2 \}$$

Denotaremos como $\mathring{\mathscr{A}}(a)$ a la familia de vecindades perforadas de un punto $a \in \mathbb{R}$.

Vecindad de infinito. Para $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$ se define el conjunto

$$\mathbf{E}_{r_1,r_2}(\infty) := \{ x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{r_1} \text{ ó } \frac{1}{r_2} < x \}$$

llamado entorno ó vecindad de infinito con radio inferior $r_1 \in \mathbb{R}^+$ y radio superior $r_2 \in \mathbb{R}^+$.

Denotaremos como $\mathscr{A}(\infty)$ a la familia de vecindades de infinito.

Vecindad perforada de infinito. Los términos vecindad de infinito y vecindad perforada de infinito los tomaremos como sinónimos, por lo que $\mathring{\mathbf{E}}_{r_1,r_2}(\infty) = \mathbf{E}_{r_1,r_2}(\infty)$, y por lo tanto $\mathring{\mathscr{A}}(\infty) = \mathscr{A}(\infty)$.

A menos que se diga otra cosa, diremos simplemente vecindad en lugar de vecindad abierta.

BOLAS

Como casos particulares de entornos ó vecindades se tienen las bolas abiertas, es decir, aquellas vecindades cuyos radios inferior y superior coinciden, o sea $r_1 = r_2 =: r$, y al que simplemente llamaremos radio de la bola.

Bola abierta de un punto. Se llama bola abierta de centro $a \in \mathbb{R}$ y radio $r > 0$ al conjunto

$$\mathbf{E}_r(a) := \,]a - r, a + r[\, = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < r \}$$

De acuerdo a la definición de bola $x \in \mathbf{E}_r(b) \Longleftrightarrow |x - b| < r$.

Denotaremos como $\mathscr{B}(a)$ a la familia de las bolas de un punto $a \in \mathbb{R}$.

Bola perforada de un punto. Se llama bola perforada de centro $a \in \mathbb{R}$ y radio $r > 0$ al conjunto

$$\mathring{\mathbf{E}}_r(a) \coloneqq \mathbf{E}_r(a) - \{a\} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq |\, x - a \,| < r \,\}$$

Denotaremos como $\mathring{\mathscr{B}}(a)$ a la familia de las bolas perforadas de un punto $a \in \mathbb{R}$.

Bola de infinito. Se llama bola de infinito de radio $r > 0$ al conjunto

$$\mathbf{E}_r(\infty) \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid |\, x \,| > \frac{1}{r} \,\}$$

Bola perforada de infinito. Los términos bola de infinito y bola perforada de infinito los tomaremos como sinónimos, por lo que $\mathring{\mathbf{E}}_r(\infty) = \mathbf{E}_r(\infty)$, y por lo tanto $\mathring{\mathscr{B}}(\infty) = \mathscr{B}(\infty)$.

Teorema 9.2. Una familia $\mathscr{A}$ de vecindades forma, con la inclusión inversa, un conjunto dirigido $(\mathscr{A}, \supseteq)$ sin último elemento.

Demostración. Para $\mathbf{E}_{r_1,r_2}$ y $\mathbf{E}_{r_3,r_4} \in \mathscr{A}$ hágase $r < \min(r_1, r_2, r_3, r_4)$. Entonces la vecindad $\mathbf{E}_r$ queda contenida propiamente en $\mathbf{E}_{r_1,r_2} \cap \mathbf{E}_{r_3,r_4}$, es decir,

$$\forall\ \mathbf{E}_{r_1,r_2} \text{ y } \mathbf{E}_{r_3,r_4} \in \mathscr{A}\ \ \exists\ \ \mathbf{E}_r \in \mathscr{A}\ \ \Big|\ \ \mathbf{E}_{r_1,r_2} \cap \mathbf{E}_{r_3,r_4} \supset \mathbf{E}_r,$$

lo que significa que $(\mathscr{A}, \supseteq)$ es un conjunto dirigido sin último elemento. ■

Teorema 10.2. Sea una familia vecindades y sea $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ la subfamilia de $\mathscr{A}$ que consiste en bolas abiertas. Entonces $\mathscr{B}$ forma un subconjunto confinal de $\mathscr{A}$.

Demostración. Sea $\mathbf{E}_{r_1,r_2} \in \mathscr{A}$ cualquier vecindad y sea $r < \min(r_1, r_2)$. Entonces la bola $\mathbf{E}_r$ que es un elemento de $\mathscr{B}$, queda contenida propiamente en $\mathbf{E}_{r_1,r_2}$, es decir,

$$\forall\ \mathbf{E}_{r_1,r_2} \in \mathscr{A}\ \ \exists\ \ \mathbf{E}_r \in \mathscr{B}\ \ \Big|\ \ \mathbf{E}_{r_1,r_2} \supset \mathbf{E}_r,$$

lo que significa que $(\mathscr{B}, \supseteq)$ es un subconjunto confinal de $(\mathscr{A}, \supseteq)$ y por lo tanto es también un dirigido sin último elemento. ■

ENTORNOS LATERALES Ó VECINDADES LATERALES

1) *Vecindades laterales de un punto*.

El conjunto $\mathbf{E}_r(a^+) \coloneqq \mathbf{E}_r(a) \cap [\, a, +\infty\, [\, = [\, a, a + r\, [\, = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x - a < r \,\}$

se llama vecindad por la derecha del punto $a \in \mathbb{R}$ con radio $r > 0$.

El conjunto $\mathbf{E}_r(a^-) \coloneqq \mathbf{E}_r(a) \cap\,]-\infty, a\,] = \,]\, a - r, a\,] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq a - x < r \,\}$

se llama vecindad por la izquierda del punto $a \in \mathbb{R}$ con radio $r > 0$.

Denotaremos como $\mathscr{B}(a^+)$ a la familia de vecindades laterales por la derecha y como $\mathscr{B}(a^-)$ a la familia de vecindades laterales por la izquierda del punto $a \in \mathbb{R}$.

2) *Vecindad perforada lateral de un punto*.

El conjunto $\mathring{\mathbf{E}}_r(a^+) := \mathring{\mathbf{E}}_r(a) \cap [\, a, +\infty\, [\; = \;]\, a, a + r\, [= \{\, x \in \mathbb{R} \mid\; 0 < x - a < r \,\}$

se llama vecindad perforada por la derecha del punto $a \in \mathbb{R}$ con radio $r > 0$.

El conjunto $\mathring{\mathbf{E}}_r(a^-) := \mathring{\mathbf{E}}_r(a) \cap \mathbb{R}^-(\, a\,) = \,]\, a - r, a\, [= \{\, x \in \mathbb{R} \mid\; 0 < a - x < r \,\}$

se llama vecindad perforada por la izquierda de un punto $a \in \mathbb{R}$ con radio $r > 0$.

Denotaremos como $\mathring{\mathscr{B}}(a^+)$ a la familia de vecindades perforadas laterales por la derecha y como $\mathring{\mathscr{B}}(a^-)$ a la familia de vecindades perforadas laterales por la izquierda del punto $a \in \mathbb{R}$.

3) *Vecindad lateral de infinito*.

El conjunto $\mathbf{E}_r(+\infty) := \mathbf{E}_r(\infty) \cap [\, 0, +\infty\, [\; = \;]\, \frac{1}{r}, +\infty\, [= \{\, x \in \mathbb{R} \mid\; x > \frac{1}{r} \,\}$

se llama vecindad de más infinito, de radio $r > 0$.

El conjunto $\mathbf{E}_r(-\infty) := \mathbf{E}_r(\infty) \cap \,]-\infty, 0] = \;]-\infty, -\frac{1}{r}\,[= \{\, x \in \mathbb{R} \mid\; x < -\frac{1}{r} \,\}$
se llama vecindad de menos infinito, con radio $r > 0$.

Denotaremos como $\mathscr{B}(+\infty)$ a la familia de vecindades de más infinito y como $\mathscr{B}(-\infty)$ a la familia de vecindades de menos infinito.

4) *Vecindad perforada lateral de infinito*.

Los términos vecindad de más (menos) infinito y vecindad perforada de más (menos) infinito los tomaremos como sinónimos, por lo que,

$$\mathring{\mathbf{E}}_r(+\infty) = \mathbf{E}_r(+\infty), \text{ y por lo tanto } \mathring{\mathscr{B}}(+\infty) = \mathscr{B}(+\infty), \text{ y}$$
$$\mathring{\mathbf{E}}_r(-\infty) = \mathbf{E}_r(-\infty), \text{ y por lo tanto } \mathring{\mathscr{B}}(-\infty) = \mathscr{B}(-\infty).$$

De las propiedades de las vecindades, se sigue que $\mathscr{A}(a) = \mathscr{A}(b)$ si, y sólo si $a = b$, donde puede ser $a, b \in \mathbb{R}$ ó bien $a = b = \infty$. Igualmente, $\mathscr{B}(a) = \mathscr{B}(b)$ si, y sólo si $a = b$, donde puede ser $a, b \in \mathbb{R}$ ó bien $a = b = \infty$.

De la misma manera, se sigue también que $\mathscr{B}(a^+) = \mathscr{B}(b^+)$ si, y sólo si $a = b$; $\mathscr{B}(a^-) = \mathscr{B}(b^-)$ si, y sólo si $a = b$. Además $\mathscr{B}(a^+) \neq \mathscr{B}(+\infty)$ si $a \in \mathbb{R}$; y $\mathscr{B}(a^-) \neq \mathscr{B}(-\infty)$ si $a \in \mathbb{R}$.

Una familia $\mathscr{B}$ de vecindades laterales no necesariamente es una subfamilia vecindades $\mathscr{A}$, por lo que no puede formar un subconjunto confinal de $\mathscr{A}$. Sin embargo

$\mathbf{E}_r(a) = \mathbf{E}_r(a^+) \cup \mathbf{E}_r(a^-)$;
$\mathbf{E}_r(\infty) = \mathbf{E}_r(+\infty) \cup \mathbf{E}_r(-\infty)$ y
$\mathring{\mathbf{E}}_r(a) = \mathring{\mathbf{E}}_r(a^+) \cup \mathring{\mathbf{E}}_r(a^-)$,

por lo se cumple el siguiente teorema:

Teorema 11.2. Una familia $\mathscr{B}$ de vecindades laterales forma con la inclusión inversa, un conjunto dirigido ($\mathscr{B}, \supseteq$) sin último elemento.

Demostración. Sean $\mathbf{E}_{r_1}$ y $\mathbf{E}_{r_2} \in \mathscr{B}$ dos vecindades laterales y sea $r < \min(r_1, r_2)$. Entonces la vecindad $\mathbf{E}_r$ queda contenida propiamente en $\mathbf{E}_{r_1}$ y en $\mathbf{E}_{r_2}$, es decir,

$$\forall\ \mathbf{E}_{r_1} \text{ y } \mathbf{E}_{r_2} \in \mathscr{B}\ \exists\ \mathbf{E}_r \in \mathscr{B}\ \big|\ \mathbf{E}_r \subset \mathbf{E}_{r_1} \cap \mathbf{E}_{r_2},$$

Esto es, ($\mathscr{B}, \supseteq$) es un conjunto dirigido sin último elemento. ■

Teorema 12.2. Cualquier familia ($\mathscr{B}, \supseteq$) de bolas ó de vecindades laterales es isomorfa al conjunto totalmente ordenado ($\mathbb{R}^+, \geq$), es decir:

$$(\mathscr{B}, \supseteq) \cong (\mathbb{R}^+, \geq)$$

Demostración. El mapeo $f:(\mathscr{B}, \supseteq) \rightleftarrows (\mathbb{R}^+, \geq)$ definido por $f(\mathbf{E}_r) \coloneqq r$, es un mapeo biyectivo que preserva el orden, es decir,

$$\forall\ \mathbf{E}_r \text{ y } \mathbf{E}_{r'} \in \mathscr{B} \qquad r < r' \iff \mathbf{E}_r \subset \mathbf{E}_{r'}$$

Por lo que f es un isomorfismo y ($\mathscr{B}, \supseteq$) es una familia totalmente ordenada. ■

Cuando se trate de una vecindad cualquiera, sin importar el ó los radios; simplemente se dirá vecindad, y se escribirá sin los subíndice r_1, r_2 ó r. Así los conjuntos anteriores se denotarán correspondientemente por:

$$\mathbf{E}(a),\ \mathring{\mathbf{E}}(a),\ \mathbf{E}(\infty),\ \mathbf{E}(a^+),\ \mathbf{E}(a^-),\ \mathring{\mathbf{E}}(a^+),\ \mathring{\mathbf{E}}(a^-),\ \mathbf{E}(+\infty) \text{ y } \mathbf{E}(-\infty).$$

Además, cuando no sea necesario especificar una familia en especial, ya sea de vecindades o vecindades perforadas de un punto o $a \in \mathbb{R}$, o vecindades de infinito; en lugar de $\mathscr{A}(a)$ ó de $\mathscr{A}(\infty)$ se escribirá $\mathscr{A}(\cdot)$ ó simplemente $\mathscr{A}$; Igualmente, en lugar de $\mathscr{B}(a)$, $\mathscr{B}(\infty)$, $\mathscr{B}(a^+)$, $\mathscr{B}(a^-)$, $\mathscr{B}(+\infty)$ ó $\mathscr{B}(-\infty)$ se escribirá $\mathscr{B}(\cdot)$ ó simplemente $\mathscr{B}$; y los elementos de cualquiera de estos conjuntos se se denotarán por $\mathbf{E}(\cdot)$ ó simplemente por $\mathbf{E}$.

ENTORNOS Ó VECINDADES EN CONJUNTOS

Definición 16.2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto de números reales y $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A. Los conjuntos

$$\mathbf{E}_A(a) \coloneqq A \cap \mathbf{E}_r(a),$$
$$\mathring{\mathbf{E}}_A(a) \coloneqq A \cap \mathring{\mathbf{E}}(a);$$

se llaman correspondientemente vecindad y vecindad perforada del punto a en el conjunto A.

Nótese que si a es un punto de acumulación del conjunto A, entonces para cualquier vecindad $\mathbf{E}(a)$, se tiene $\mathring{\mathbf{E}}_A(a) \neq \varnothing$.

Definición 17.2. Supongamos $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto no acotado de números reales. El conjunto

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{A}}(\infty) \coloneqq \boldsymbol{A} \cap \mathbf{E}(\infty),$$

se llama vecindad de infinito en el conjunto $\boldsymbol{A}$.

Ahora se pueden definir las vecindades laterales de la siguiente manera:

Una vecindad lateral es una vecindad un conjunto $\boldsymbol{A}$,

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{A}} \coloneqq \boldsymbol{A} \cap \mathbf{E},$$
$$\mathring{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{A}} \coloneqq \boldsymbol{A} \cap \mathring{\mathbf{E}};$$

y que dependiendo del conjunto $\boldsymbol{A}$ se clasifican de la siguiente manera:

CONJUNTOS ABIERTOS Y CERRADOS

Definición 10.2. Un punto $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ se llama *punto adherente* de $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}$, si para toda vecindad $\mathbf{E}(\boldsymbol{a})$, se tiene, $\mathbf{E}(\boldsymbol{a}) \cap \boldsymbol{A} \neq \varnothing$.

Nótese que $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ es un *punto adherente* de $\boldsymbol{A}$, si no existe $\mathbf{E}(\boldsymbol{a}) \subset (\mathbb{R} - \boldsymbol{A})$.

Todos los puntos de $\boldsymbol{A}$ son *puntos adherentes* de $\boldsymbol{A}$. Pueden existir *puntos adherentes* de $\boldsymbol{A}$ que no pertenezcan al conjunto $\boldsymbol{A}$.

Un punto $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ es un *punto frontera* de $\boldsymbol{A}$ si en el entorno $\mathbf{E}(\boldsymbol{a})$ del punto $\boldsymbol{a}$ existen puntos de $\boldsymbol{A}$ y puntos de $\mathbb{R} - \boldsymbol{A}$.

Los *puntos frontera* son *puntos adherentes* de $\boldsymbol{A}$ y pueden pertenecer, o no, al conjunto $\boldsymbol{A}$.

Al conjunto de puntos frontera de $\boldsymbol{A}$ se llama *frontera* de $\boldsymbol{A}$, y se denota como $\partial(\boldsymbol{A})$.

El conjunto de todos los puntos adherentes de un conjunto $\boldsymbol{A}$ se llama adherencia de $\boldsymbol{A}$ y se denota como $[\boldsymbol{A}]$ o como $\overline{\boldsymbol{A}}$.

Definición 11.2. Un punto $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ se llama *punto de acumulación* o *punto límite* de un conjunto $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}$, si cualquier entorno $\mathbf{E}(\boldsymbol{a})$, contiene al menos un elemento de $\boldsymbol{A}$ distinto de $\boldsymbol{a}$.

Nótese que $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ es un *punto de acumulación* de $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}$, si $\mathring{\mathbf{E}}(\boldsymbol{a}) \cap \boldsymbol{A} \neq \varnothing\ \forall \mathbf{E}(\boldsymbol{a})$.

Se puede comprobar que si cualquier entorno $\mathring{\mathbf{E}}(\boldsymbol{a})$ contiene al menos un elemento de $\boldsymbol{A}$, entonces cualquier entorno $\mathring{\mathbf{E}}(\boldsymbol{a})$ contiene un número infinito de elementos de $\boldsymbol{A}$.

El conjunto de todos los puntos de acumulación de $\boldsymbol{A}$ se llama conjunto derivado de $\boldsymbol{A}$.

Definición 12.2. Un punto $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}$ se llama punto aislado de $\boldsymbol{A}$, si existe una vecindad perforada $\mathring{\mathbf{E}}(\boldsymbol{a})$ tal que $\mathring{\mathbf{E}}(\boldsymbol{a}) \cap \boldsymbol{A} = \varnothing$.

Definición 13.2. Un punto $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}$ se llama punto interior de $\boldsymbol{A}$, si existe una vecindad $\mathbf{E}(\boldsymbol{a})$ tal que $\mathbf{E}(\boldsymbol{a}) \subset \boldsymbol{A}$.

El conjunto de los puntos interiores de un conjunto $\boldsymbol{A}$ se llama interior de $\boldsymbol{A}$ y se denota por int($\boldsymbol{A}$).

Un conjunto $\boldsymbol{A}$ es un conjunto de puntos aislados si int($\boldsymbol{A}$) = ∅.

Definición 14.2. Un conjunto $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}$ se llama abierto, si todos sus puntos son interiores, es decir, si $\boldsymbol{A} = \text{int}(\boldsymbol{A})$.

Definición 15.2. Un conjunto $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}$ se llama cerrado, si todos sus puntos de acumulación le pertenecen, es decir si todos sus puntos son adherentes. $\boldsymbol{A} = \overline{\boldsymbol{A}}$.

Se puede comprobar que la unión de cualquier familia de conjuntos abiertos es un conjunto abierto, intersección de cualquier familia finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto, el complemento de un conjunto abierto es un conjunto cerrado.

Ejemplos.

1) Sea $\boldsymbol{X} = \{ \frac{1}{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{R} \mid \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} \}$, entonces el punto $0 \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación o punto límite de $\boldsymbol{X}$.

   Puede observarse que $\boldsymbol{X}$ es un subconjunto confinal de $\boldsymbol{Y} = \{ \frac{1}{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R} \mid \boldsymbol{x} \geq 1 \}$, y que además el punto $0 \in \mathbb{R}$ es también un punto de acumulación o punto límite de $\boldsymbol{Y}$.

2) Cualquier punto del segmento $[\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \,]$ es un punto de acumulación o punto límite del intervalo $]\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \,[$. Los puntos del segmento $[\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \,]$ son los únicos puntos de acumulación del intervalo $]\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \,[$.

3) Cualquier punto de $\mathbb{R}$ es un punto de acumulación o punto límite del conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales.

§ 11.2 TEOREMAS FUNDAMENTALES SOBRE LA CONTINUIDAD DE LOS NÚMEROS REALES.

Lema sobre los segmentos encajados (Principio de Cauchy-Cantor).

Definición 18.2. Un mapeo $f\colon \mathbb{N} \to X$ cuyo dominio de definición es el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, se llama *sucesión*, o mejor dicho *sucesión de los elementos de* X y se denota como $\{ x_n \in X \}_{n \in \mathbb{N}}$ o, simplemente $\{ x_n \}_{n \in \mathbb{N}}$.

La imagen $f(n) \in X$ del número $n \in \mathbb{N}$ bajo la sucesión f se denota como x_n y es llamado ***n**-ésimo término* de la sucesión.

Definición 19.2. Una sucesión $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ se llama *sucesión de conjuntos encajados* de números reales si

$$X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots \text{, es decir, si } X_n \supset X_{n+1} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Lema 10. En cualquier sucesión $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ de segmentos encajados de números reales existe un punto $c \in \mathbb{R}$ que pertenece a todos los segmentos de la sucesión.

Si además es conocido que para cualquier $\varepsilon > 0$, en la sucesión $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ se puede encontrar un segmento $I_n=[a_n, b_n]$ cuya longitud $|I_n| = b_n - a_n < \varepsilon$ entonces el punto $c \in \mathbb{R}$ es único para todos los segmentos, es decir,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; I_n=[a_n, b_n] \;\Big|\; |I_n| = b_n - a_n < \varepsilon \;\text{ entonces }\; \exists!\; c \in \mathbb{R} \;\Big|\; c \in I_n \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Antes que nada, nótese que para cualesquiera dos segmentos $I_n=[a_n, b_n]$ y $I_m=[a_m, b_m]$, se tiene que $a_n \le b_m$, pues en caso contrario se tendría $a_n \le b_n < a_m \le b_m$, lo cual significaría que I_n y I_m serían disjuntos y por lo tanto no estarían encajados.

Se tiene entonces que para los conjuntos $A \coloneqq \{ a_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ y $B \coloneqq \{ b_m \}_{m \in \mathbb{N}}$ se satisfacen las condiciones del axioma de continuidad, por el cual existe un número $c \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \le c \le b_m$ $\forall\, a_n \in A$ y $\forall\, b_m \in B$. En particular $a_n \le c \le b_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Pero esto significa que el punto $c \in \mathbb{R}$ pertenece a todos los segmentos I_n.

Supóngase ahora que existen dos puntos $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ que pertenecen a todos los segmentos I_n. Supóngase que $c_1 < c_2$. entonces $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $a_n \le c_1 < c_2 \le b_n$, es decir, $0 < c_2 - c_1 \le b_n - a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, lo cual muestra que la longitud $|I_n| = b_n - a_n$. de cada segmento I_n no puede ser menor que $\varepsilon = c_2 - c_1 > 0$. Esta contradicción demuestra que $c_1 = c_2$. ■

LEMA DE LA CUBIERTA FINITA (PRINCIPIO DE BOREL-LEBESGE)

Recordemos que una familia $\sigma = \{\mathbf{U}\}$ de conjuntos es una cubierta de un conjunto X, ó un sistema que cubre a X, si $X \subseteq \bigcup_{\mathbf{U} \in \sigma} \mathbf{U}$.

Además, cualquier subfamilia de σ que a su vez sea cubierta de X se llama subcubierta de X, ó subsistema que cubre a X.

Lema 11. En cualquier sistema $\sigma = \{\mathbf{U}\}$ de intervalos, que cubre a un segmento $I_0 = [a_0, b_0]$ existe un subsistema finito que también cubre a dicho segmento.

Demostración. Supóngase que el segmento $I_0 := [a_0, b_0]$ no se puede cubrir con un subsistema finito de σ. Al dividir el segmento I_0 por la mitad, por lo menos una de las mitades no podrá cubrirse con un subsistema finito de σ. Denótese esta como $I_1 := [a_1, b_1]$. Procedamos de la misma manera y denotemos por $I_2 := [a_2, b_2]$ la mitad del segmento por I_2 que no puede cubrirse con un subsistema finito de σ, y continuemos así sucesivamente.

Se obtiene entonces una sucesión $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ de segmentos encajados, cada uno de los cuales no puede ser cubierto con un subsistema finito intervalos de σ. Como la longitud del segmento obtenido en el paso n es $| I_n | = \frac{b_n - a_n}{2^n}$, entonces por el Principio de Cauchy-Cantor (lema anterior) existe un punto $c \in \mathbb{R}$ que pertenece a todos los segmentos I_n de la sucesión. Como $c \in I_0$, entonces existe un intervalo $\mathbf{U} =]\,\alpha, \beta\,[$ del sistema σ que contiene al punto c, es decir, $\alpha < c < \beta$. Para $\varepsilon = \min \{ c - \alpha, \beta - c \}$, se encuentra en la sucesión $\{ I_n \}$ un segmento I_n cuya longitud $| I_n | < \varepsilon$, pero como $c \in I_n$, entonces $I_n \subset \mathbf{U} =]\,\alpha, \beta\,[$. Pero esto contradice que I_n no pueda ser cubierto con un subsistema finito intervalos de σ. ■

Lema del Punto de Acumulación (Principio de Bolzano-Weierstrass)

Recordemos que un punto $p \in \mathbb{R}$ se llama punto de acumulación o punto límite de un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, si cualquier entorno $\mathbf{U}(p)$, contiene al menos un elemento de X distinto de p, es decir, si para cualquier entorno $\mathbf{U}(p)$ del punto p la intersección de X con el entorno perforado $\mathring{\mathbf{U}}(p) := \mathbf{U}(p) - \{ p \}$ es no vacía.

Se puede comprobar que si cualquier entorno $\mathring{\mathbf{U}}(p)$ contiene al menos un elemento de X, entonces cualquier entorno $\mathring{\mathbf{U}}(p)$ contiene un número infinito de elementos de X.

Lema 12. Cualquier conjunto infinito y acotado $X \subseteq \mathbb{R}$ de números reales tiene por lo menos un punto de acumulación.

Demostración. Como X es acotado, entonces X queda contenido en algún segmento $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Demostraremos que por lo menos un punto de I es un punto de acumulación de X.

Supóngase lo contrario, es decir, que ningún punto de I es un punto de acumulación de X. Entonces cada punto $p \in I$ tiene una vecindad $\mathbf{U}(p)$ tal que $\mathring{\mathbf{U}}(p) := \mathbf{U}(p) - \{ p \}$ no contiene puntos de X (ó contiene sólo un número finito de ellos). La familia $\sigma = \{\mathbf{U}(p)\}_{p \in I}$ de tales vecindades forma una cubierta del segmento I. Por el lema anterior existe una subcubierta $\{\mathbf{U}(p_1), \ldots, \mathbf{U}(p_n)\}$ finita de I. Como $X \subseteq I$, entonces esta subcubierta cubre también al conjunto X. Sin embargo, cada vecindad $\mathring{\mathbf{U}}(p)$ es disjunta con X (ó contiene solamente un conjunto finito de elementos de X), por lo tanto la subcubierta $\{\mathbf{U}(p_1), \ldots, \mathbf{U}(p_n)\}$ es vacía (ó contiene solamente un conjunto finito de elementos de X). Por lo tanto X es un conjunto vacío (ó finito), lo que contradice la hipótesis. ■

CAPÍTULO III
LÍMITES

§ 1.3 LÍMITE DE UN MAPEO BAJO UN CONJUNTO DIRIGIDO

Definición 1.3. Un elemento $b \in \mathbb{R}$ (ó $b = \infty$ ó $b = +\infty$ ó $b = -\infty$) se llama límite del mapeo f: $A \to \mathbb{R}$, bajo el conjunto dirigido sin último elemento $(A, \precsim)$, lo que se escribe $\lim\limits_{(A,\precsim)} f(x) \coloneqq b$, si para cualquier vecindad $\mathbf{U}(b)$ existe un elemento $\tilde{x} \in A$, tal que $f(x) \in \mathbf{U}(b)$ para todo $x \in A$ tal que $x \succ \tilde{x}$, es decir,

$$\lim_{(A,\precsim)} f(x) \coloneqq b \iff \forall\ \mathbf{U}(b)\ \exists\ \tilde{x} \in A, \text{ tal que } f(x) \in \mathbf{U}(b)\ \ \forall\ x \succ \tilde{x},\ x \in A.$$

Nótese que los elementos del conjunto A pueden ser de cualquier naturaleza. Además la definición, como se puede ver, es también válida para $b = \infty$ ó $b = +\infty$ ó $b = -\infty$.

La definición anterior es equivalente a la siguiente:

Definición 1.3.A. Un elemento $b \in \mathbb{R}$ (ó $b = \infty$ ó $b = +\infty$ ó $b = -\infty$) se llama límite del mapeo f: $A \to \mathbb{R}$, bajo el conjunto dirigido sin último elemento $(A, \precsim)$, lo que se escribe $\lim\limits_{(A,\precsim)} f(x) \coloneqq b$, si para cualquier vecindad $\mathbf{U}(b)$ del punto b el conjunto $B \coloneqq \{\, x \in A \mid f(x) \notin \mathbf{U}(b)\}$ no es un subconjunto confinal de A.

De acuerdo esta definición, las imágenes de todos los x posteriores a $\tilde{x}$ quedan contenidos en $\mathbf{U}(b)$, es decir, una cantidad infinita; y por el contrario, las imágenes de los x anteriores a $\tilde{x}$ quedan fuera de $\mathbf{U}(b)$, es decir, sólo una cantidad finita.

Teorema 1.3 (Unicidad del límite de un mapeo). Sea f: $A \to \mathbb{R}$ un mapeo definido en un conjunto dirigido $(A, \precsim)$ sin último elemento.

Si $\lim\limits_{(A,\precsim)} f(x) = b_1$ y $\lim\limits_{(A,\precsim)} f(x) = b_2$, entonces $b_1 = b_2$.

Demostración. Supongamos $b_1 \neq b_2$. Tómense $\mathbf{U}(b_1)$ y $\mathbf{U}(b_2)$ tales que $\mathbf{U}(b_1) \cap \mathbf{U}(b_2) = \varnothing$.

Como $\lim\limits_{(A,\precsim)} f(x) = b_1$, por lo que $\exists\ \tilde{x} \in A$, tal que $f(x) \in \mathbf{U}(b)\ \ \forall\ x \succ \tilde{x}$.

Análogamente, como $\lim\limits_{(A,\precsim)} f(x) = b_2$, por lo que $\exists\ \tilde{\tilde{x}} \in A$, tal que $f(x) \in \mathbf{U}(b_2)\ \forall\ x \succ \tilde{\tilde{x}}$.

Pero $(A, \precsim)$ es un conjunto dirigido, por lo que $\exists\ x_0 \in A \mid \tilde{x} \prec x_0$ y $\tilde{\tilde{x}} \prec x_0$. Entonces, $\forall$ $x \succ x_0$, se tiene que $f(x) \in \mathbf{U}(b_1)$ y $f(x) \in \mathbf{U}(b_1)$, pero, por hipótesis $\mathbf{U}(b_1) \cap \mathbf{U}(b_2) = \varnothing$. Con esta contradicción queda demostrado el teorema. ■

Teorema 2.3. Sea f: $A \to \mathbb{R}$ un mapeo definido en un conjunto dirigido $(A, \precsim)$ sin último elemento y sea $B \subseteq A$, un subconjunto confinal de A. Si $\lim\limits_{(A,\precsim)} f(x) = b$, entonces $\lim\limits_{(B,\precsim)} f(x) = b$.

Demostración. Para cualquier vecindad $\mathbf{U}(b)$, como $\lim\limits_{(A,\precsim)} f(x) = b$, entonces $\exists\ \tilde{x} \in A$, tal que $f(x) \in \mathbf{U}(b)\ \ \forall\ x \succ \tilde{x}$, $x \in A$. Como $B \subseteq A$ es un subconjunto confinal de A, entonces $\exists\ \tilde{\tilde{x}} \in B$, tal que $\tilde{x} \prec \tilde{\tilde{x}}$. Entonces $\forall\ x \succ \tilde{\tilde{x}}$, $x \in B$, se tiene $f(x) \in \mathbf{U}(b)$, es decir, $\lim\limits_{(B,\precsim)} f(x) = b$. ■

§ 2.3 BASE DE UN CONJUNTO.

La familia $\mathscr{B}_{A} := \{ \mathbf{E} \subseteq A \mid \mathbf{E} \neq \varnothing \}$ de subconjuntos no vacíos de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ forma una base de A, si

$$\forall\, \mathbf{E}_1 \in \mathscr{B}_{A}, \mathbf{E}_2 \in \mathscr{B}_{A} \;\; \exists\, \mathbf{E} \in \mathscr{B}_{A} \;\middle|\; \mathbf{E} \subset \mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2$$

Nótese que $\mathscr{B}_{A} = \{ \mathbf{E} \cap A \mid \mathbf{E} \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}} \}$.

Como $\mathbf{E}$ es un subconjunto propio de la intersección $\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2$, entonces la familia $\mathscr{B}_{A}$ es una familia infinita y una base $\mathscr{B}_{A}$ de un conjunto A forma con la inclusión inversa $\supseteq$, un conjunto dirigido sin último elemento, es decir, $(\mathscr{B}_{A}, \supseteq)$ es un conjunto dirigido, sin último elemento.

Cuando no haya lugar a confusión respecto al conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ en discurso, escribiremos simplemente $\mathscr{B}$ en lugar de $\mathscr{B}_{A}$.

Definición 2.3. Se dice que una propiedad se cumple finalmente (o terminalmente) en $\mathscr{B}$ si dicha propiedad se cumple en algún elemento $\mathbf{E}$ de la base $\mathscr{B}$.

Definición 3.3. El mapeo f: $A \to \mathbb{R}$ se llama finalmente constante en $\mathscr{B}$ si es constante en algún $\mathbf{E} \in \mathscr{B}$.

Definición 4.3. Un mapeo f: $A \to \mathbb{R}$ se llama acotado, superiormente acotado, inferiormente acotado; si existe algún $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tal que $\forall\, x \in A$ se cumplan correspondientemente las siguientes desigualdades:

$$|f(x)| < \mathrm{M}, \quad f(x) < \mathrm{M}, \quad f(x) > \mathrm{M}.$$

A continuación se citan algunas de las bases más utilizadas en el análisis:

Notación de la Base $\mathscr{B}$	Elementos que la componen	
$x \to a$,	$\mathring{\mathbf{E}}(a)$	Vecindades perforadas del punto a.
$x \to a^{+}$,	$\mathring{\mathbf{E}}(a^{+})$	Vecindades laterales derechas perforadas del punto a.
$x \to a^{-}$,	$\mathring{\mathbf{E}}(a^{-})$	Vecindades laterales izquierdas perforadas del punto a.
$x \to \infty$,	$\mathbf{E}(\infty)$	Vecindades de infinito.
$x \to +\infty$,	$\mathbf{E}(+\infty)$	Vecindades de infinito.
$x \to -\infty$,	$\mathbf{E}(-\infty)$	Vecindades de infinito.

§ 3.3 NOTACIONES DE LANDAU.

Definición 5.3. Sea $\mathscr{B}$ una base de un conjunto $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$. El mapeo α: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ es llamado infinitesimal en $\mathscr{B}$, si

$$\forall\, \mathbf{U}(0)\ \exists\, \mathbf{E} \in \mathscr{B}\ \big|\ \alpha(\mathbf{E}) \subseteq \mathbf{U}(0)$$

Definición 6.3. Sean f, g: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ dos mapeos reales y $\mathscr{B}$ una base de $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$. Se dice que f es "o minúscula" de g en $\mathscr{B}$, lo que se denota como $f \underset{\mathscr{B}}{=} o(g)$ o bien, como $f = o(g)$ en $\mathscr{B}$, si existe un mapeo infinitesimal α: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f = \alpha \cdot g \ \text{ en } \ \mathscr{B}.$$

Como $\alpha(\boldsymbol{x}) \underset{\mathscr{B}}{=} \alpha(\boldsymbol{x}) \cdot 1$ en cualquier base $\mathscr{B}$, entonces $\alpha \underset{\mathscr{B}}{=} o(1)$. Es decir,

$\alpha(\boldsymbol{x}) \underset{\mathscr{B}}{=} o(1) \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \mathbf{E} \in \mathscr{B}\ \big|\ |\alpha(\boldsymbol{x})| < \varepsilon \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbf{E}$.

Además $f \underset{\mathscr{B}}{=} o(g) \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \mathbf{E} \in \mathscr{B}\ \big|\ |f(\mathbf{E})| < \varepsilon\, |g(\mathbf{E})|$

Teorema 3.3. Propiedades de o(1).

1) $o(1) \pm o(1) = o(1)$
2) $o(1) \cdot o(1) = o(1)$
3) $o(1) \cdot g = o(g)$,

   y si $g(\boldsymbol{x}) \neq 0$ en algún $\mathbf{E} \in \mathscr{B}$, entonces $\dfrac{o(1)}{g} = o\left(\dfrac{1}{g}\right)$
4) $\boldsymbol{k} \cdot o(1) = o(1)$ donde $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$

   $\dfrac{o(1)}{\boldsymbol{k}} = o(1)$ donde $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$
5) $o(o(1)) = o(1)$

Demostración. En cada caso se toma $\mathbf{E} \subset \mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2$.

1) $\alpha_1 = o(1)$ y $\alpha_2 = o(1) \Leftrightarrow |\alpha_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ y $|\alpha_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Entonces

$$|\alpha_1 \pm \alpha_2| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ esto es, } o(1) \pm o(1) = \alpha_1 \pm \alpha_2 = o(1)$$

2) $|\alpha_1 \cdot \alpha_2| = |\alpha_1|\,|\alpha_2| < \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 =: \varepsilon$. Por lo tanto $o(1) \cdot o(1) = o(1)$.

3) $o(1) \cdot g = \alpha \cdot g = o(g)$, y si $g \neq 0$ en algún $\mathbf{E} \in \mathscr{B}$, entonces

$$\frac{o(1)}{g} = \alpha \cdot \frac{1}{g} = o\left(\frac{1}{g}\right).$$

4) $|\alpha| < \dfrac{\varepsilon}{|\boldsymbol{k}|} \Rightarrow |\boldsymbol{k}\,\alpha| < \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{k}\,\alpha = o(1)$.

Y si $\boldsymbol{k} \neq 0$ se hace lo mismo con $\dfrac{1}{\boldsymbol{k}}$ en lugar de $\boldsymbol{k}$ para obtener $\dfrac{\alpha}{\boldsymbol{k}} = o(1)$.

$$|\alpha| < \varepsilon\,|\boldsymbol{k}| \Rightarrow \left|\frac{\alpha}{\boldsymbol{k}}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{\alpha}{\boldsymbol{k}} = o(1).$$

5) se deduce de 3) y 2) es decir, $o(o(1)) = o(1) \cdot o(1) = o(1)$.

Definición 7.3. Sea $\mathscr{B}$ una base de un conjunto $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$. El mapeo β: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ es llamado mapeo finalmente acotado (o cota superior asintótica) en $\mathscr{B}$, si

$$\exists\ \mathbf{U}(0)\ \text{ y } \exists\ \mathbf{E} \in \mathscr{B}\ \Big|\ \beta(\mathbf{E}) \subseteq \mathbf{U}(0)$$

Definición 8.3. Sean f, g: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ dos mapeos reales $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$ y $\mathscr{B}$ una base de $\boldsymbol{A}$. Se dice que f es "O mayúscula" de g en $\mathscr{B}$, lo que se denota como $f \underset{\mathscr{B}}{=} \mathrm{O}(g)$ o bien, como $f = \mathrm{O}(g)$ en $\mathscr{B}$, si existe un mapeo finalmente acotado β: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f = \beta \cdot g \ \text{ en } \ \mathscr{B}.$$

Como $\beta(\boldsymbol{x}) \underset{\mathscr{B}}{=} \beta(\boldsymbol{x}) \cdot 1$ en cualquier base $\mathscr{B}$, entonces $\beta \underset{\mathscr{B}}{=} \mathrm{O}(1)$. Es decir,

$$\beta(\boldsymbol{x}) \underset{\mathscr{B}}{=} \mathrm{O}(1) \iff \exists\ \boldsymbol{r} \geq 0,\ \mathbf{E} \in \mathscr{B}\ \Big|\ |\beta(\boldsymbol{x})| \leq \boldsymbol{r} \quad \forall\ \boldsymbol{x} \in \mathbf{E}.$$

Además $$f \underset{\mathscr{B}}{=} \mathrm{O}(g) \iff \exists\ \boldsymbol{c} > 0,\ \mathbf{E} \in \mathscr{B}\ \Big|\ |f(\mathbf{E})| < \boldsymbol{c}\,|g(\mathbf{E})|.$$

Teorema 4.3. Propiedades de $\mathrm{O}(1)$.

1) $\mathrm{O}(1) \pm \mathrm{O}(1) = \mathrm{O}(1)$ 5) $\mathrm{o}(1) \pm \mathrm{O}(1) = \mathrm{O}(1)$
2) $\mathrm{O}(1) \cdot \mathrm{O}(1) = \mathrm{O}(1)$
3) $\mathrm{O}(1) \cdot g = \mathrm{O}(g)$, y si $g(\boldsymbol{x}) \neq 0$ en algún $\mathbf{E} \in \mathscr{B}$, entonces
$$\frac{\mathrm{O}(1)}{g} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{g}\right)$$
4) $\boldsymbol{k} \cdot \mathrm{O}(1) = \mathrm{O}(1)$ donde $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$
$$\frac{\mathrm{O}(1)}{\boldsymbol{k}} = \mathrm{O}(1) \qquad \text{donde } \boldsymbol{k} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
5) $\mathrm{O}(\mathrm{O}(1)) = \mathrm{O}(1)$

Demostración. En cada caso se toma $\mathbf{E} \subset \mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2$.

1) $\beta_1 = \mathrm{O}(1)$ y $\beta_2 = \mathrm{O}(1)$ $\Leftrightarrow$ $|\beta_1| < \boldsymbol{c}_1$ y $|\beta_2| < \boldsymbol{c}_2$. Entonces

$$|\beta_1 \pm \beta_2| \leq |\beta_1| + |\beta_2| < \boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_2 =: \boldsymbol{c},$$ esto es, $\mathrm{O}(1) \pm \mathrm{O}(1) = \beta_1 \pm \beta_2 = \mathrm{O}(1)$.

2) $|\beta_1 \cdot \beta_2| = |\beta_1|\,|\beta_2| < \boldsymbol{c}_1 \cdot \boldsymbol{c}_2 =: \boldsymbol{c}$. Por lo tanto $\mathrm{O}(1) \cdot \mathrm{O}(1) = \mathrm{O}(1)$.

3) $\mathrm{O}(1) \cdot g = \beta \cdot g = \mathrm{O}(g)$, y si $g \neq 0$ en algún $\mathbf{E} \in \mathscr{B}$, entonces

$$\frac{\mathrm{O}(1)}{g} = \beta \cdot \frac{1}{g} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{g}\right).$$

4) $|\beta| \leq \boldsymbol{c}_1 \Rightarrow |\boldsymbol{k}\,\beta| \leq \boldsymbol{c}_1\,|\boldsymbol{k}| =: \boldsymbol{c} \Rightarrow \boldsymbol{k}\,\beta = \mathrm{O}(1)$.

Y si $\boldsymbol{k} \neq 0$ se hace lo mismo con $\frac{1}{\boldsymbol{k}}$ en lugar de $\boldsymbol{k}$ para obtener $\frac{\beta}{\boldsymbol{k}} = \mathrm{O}(1)$.

$$|\beta| < \boldsymbol{c}_1\,|\boldsymbol{k}| =: \boldsymbol{c} \Rightarrow \left|\frac{\beta}{\boldsymbol{k}}\right| < \boldsymbol{c} \Rightarrow \frac{\beta}{\boldsymbol{k}} = \mathrm{O}(1).$$

5) se deduce de 3) y 2) es decir, $\mathrm{O}(\mathrm{O}(1)) = \mathrm{O}(1) \cdot \mathrm{O}(1) = \mathrm{O}(1)$.

Teorema 5.3. Propiedades que relacionan a O(1) y o(1).

1) $o(1) \pm O(1) = O(1)$;
2) $o(1) \cdot O(1) = o(1)$;
3) $O(o(1)) = o(1)$ y $o(O(1)) = o(1)$;
4) $\forall\, b \in \mathbb{R}$ $b + o(1) = O(1)$, en particular, $b = 0$ muestra que o(1) es también O(1).

Demostración. En cada caso se toma $\mathbf{E} \subset \mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2$.

1) Para $\varepsilon = \frac{c}{2}$, se tiene $|\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta| < \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$. Por lo tanto $o(1) \pm O(1) = O(1)$.

2) $\alpha = o(1)$ y $\beta = O(1)$. Entonces para $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{c}$, se tiene

$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha|\,|\beta| < \varepsilon_1\, c < \frac{\varepsilon}{c} c = \varepsilon$, esto es, $o(1)\, O(1) = \alpha \cdot \beta = o(1)$.

3) se deduce de 3) de los teoremas anteriores y 6) de los teoremas anteriores es decir,

$$O(o(1)) = O(1) \cdot o(1) = o(1) \qquad \text{y} \qquad o(O(1)) = o(1) \cdot O(1) = o(1)$$

4) Como $\beta = O(1)$ entonces existe un $c_1 \in \mathbb{R}^+$ tal que $|\beta| < c_1$. Sea $c \coloneqq c_1 + |b|$. Como $\alpha = o(1)$, entonces $|\alpha| < \varepsilon\ \forall\ \varepsilon > 0$, en particular, para $\varepsilon \le c_1 = c - |b|$, se tiene $|\alpha + b| \le |\alpha| + |b| < \varepsilon + |b| < c$ por lo que $b + \alpha = O(1)$, es decir, $b + o(1) = O(1)$. En particular $b = 0$ muestra que o(1) es también O(1). ■

Es importante tener en cuenta que, cuando $x \to 0$, se tiene

$$O(x^{n+1}) = \beta(x) \cdot x^{n+1} = \beta(x) \cdot x \cdot x^n = \alpha(x) \cdot x^n = o(x^n).$$

Además, por inducción, se puede demostrar que

$$x^{n+1} = x \cdot 1 \cdot x^n = \alpha(1) \cdot x^n = o(x^n).$$

Será de mucha utilidad tomar en cuenta que

si $f(x) \le o(1)$ en $\mathscr{B}$, entonces $f(x) \underset{\mathscr{B}}{=} o(1)$,
y si $f(x) \le O(1)$ en $\mathscr{B}$, entonces $f(x) \underset{\mathscr{B}}{=} O(1)$.

§ 4.3 EQUIVALENCIA ASINTÓTICA

Definición 35.3. Sea $\mathscr{B}$ una base de un conjunto $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$. El mapeo γ: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ es llamado finalmente unitario en $\mathscr{B}$, si

$$\forall\ \mathbf{U}(1)\ \exists\ \mathbf{E} \in \mathscr{B}\ \big|\ \alpha(\mathbf{E}) \subseteq \mathbf{U}(1)$$

Definición 36.3. Sea $\mathscr{B}$ una base de un conjunto $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$. Se dice que el mapeo f: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ es asintóticamente equivalente al mapeo g: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ en $\mathscr{B}$, lo que se escribe $f \sim g$ en $\mathscr{B}$, o bien $f \underset{\mathscr{B}}{\sim} g$ si existe un mapeo finalmente unitario γ: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f = \gamma \cdot g \ \text{ en } \ \mathscr{B}.$$

Como $\gamma(\boldsymbol{x}) \underset{\mathscr{B}}{=} \gamma(\boldsymbol{x}) \cdot 1$ en cualquier base $\mathscr{B}$, entonces $\gamma \underset{\mathscr{B}}{\sim} 1$, es decir, $\gamma(\boldsymbol{x}) \underset{\mathscr{B}}{=} 1 + \alpha(\boldsymbol{x})$. Así,

$$\gamma(\boldsymbol{x}) \underset{\mathscr{B}}{=} 1 + \alpha(\boldsymbol{x}) \iff \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \mathbf{E} \in \mathscr{B}\ \big|\ |\gamma(\boldsymbol{x}) - 1| < \varepsilon \quad \forall\ \boldsymbol{x} \in \mathbf{E}.$$

Además $\ f \underset{\mathscr{B}}{\sim} g \iff \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \mathbf{E} \in \mathscr{B}\ \big|\ |f(\mathbf{E}) - g(\mathbf{E})| < \varepsilon\, |\, g(\mathbf{E})\, |.$

De la definición se deduce inmediatamente que

$$f \underset{\mathscr{B}}{\sim} g \Leftrightarrow f \underset{\mathscr{B}}{=} \gamma \cdot g \underset{\mathscr{B}}{=} (1 + \mathrm{o}(1))\, g \underset{\mathscr{B}}{=} g + \mathrm{o}(g).$$

Además, si $g \neq 0$ en algún $\boldsymbol{B} \in \mathscr{B}$, entonces $f \underset{\mathscr{B}}{=} g + \mathrm{o}(g) \Leftrightarrow \dfrac{f}{g} \underset{\mathscr{B}}{=} 1 + \mathrm{o}(1) \underset{\mathscr{B}}{=} \gamma$.

Teorema 4.3. Propiedades de $\gamma(\boldsymbol{x}) \underset{\mathscr{B}}{=} 1 + \alpha(\boldsymbol{x})$.

1) $\gamma \cdot f \underset{\mathscr{B}}{=} f$,
2) $\gamma\, \gamma \underset{\mathscr{B}}{=} \gamma$,
3) $\dfrac{1}{\gamma} \underset{\mathscr{B}}{=} \gamma$.

Demostración. Sea $\mathscr{B}$ una base de un conjunto $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$, y sean f: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$. Entonces

1) $\gamma \cdot f \underset{\mathscr{B}}{=} 1 \cdot f \underset{\mathscr{B}}{=} f$.
2) $\gamma\, \gamma \underset{\mathscr{B}}{=} (1 + \alpha)(1 + \alpha) \underset{\mathscr{B}}{=} (1 + \alpha + \alpha\, \alpha) \underset{\mathscr{B}}{=} 1 + \alpha \underset{\mathscr{B}}{=} \gamma$.
3) Sea $\mathbf{E} \in \mathscr{B}$ para el cual $|\, \alpha(\boldsymbol{x})\, | < \dfrac{\varepsilon}{2} < \dfrac{1}{2} \quad \forall\ \boldsymbol{x} \in \mathbf{E}$. Entonces, en este $\mathbf{E}$, se tiene

$$-\frac{1}{2} < \alpha(\boldsymbol{x}) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < 1 + \alpha(\boldsymbol{x}) < \frac{3}{2} \Longrightarrow 2 > \frac{1}{1 + \alpha(\boldsymbol{x})} > \frac{2}{3} > -2 \Longrightarrow \left|\frac{1}{1 + \alpha(\boldsymbol{x})}\right| < 2,$$

es decir, $\dfrac{1}{\gamma} = \dfrac{1}{1 + \alpha} = \beta$ en $\mathbf{E}$.

Además, $\left|\dfrac{1}{1 + \alpha(\boldsymbol{x})} - 1\right| = \left|1 - \dfrac{1}{1 + \alpha(\boldsymbol{x})}\right| = \left|\dfrac{\alpha(\boldsymbol{x})}{1 + \alpha(\boldsymbol{x})}\right| = \left|\dfrac{1}{1 + \alpha(\boldsymbol{x})}\right| |\alpha(\boldsymbol{x})| < 2\, \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, lo que significa que, $\dfrac{1}{\gamma} - 1 \underset{\mathscr{B}}{=} \dfrac{1}{1 + \alpha} - 1 \underset{\mathscr{B}}{=} \alpha$, por lo que se tiene $\dfrac{1}{\gamma} \underset{\mathscr{B}}{=} 1 + \alpha \underset{\mathscr{B}}{=} \gamma$. ■

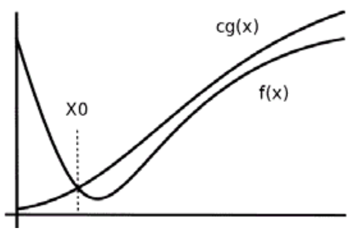
Teorema 23.3. Sea $\mathscr{B}$ una base de un conjunto $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$, y sean f, g, h: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$. Entonces

1) $f \underset{\mathscr{B}}{\sim} f$
2) $f \underset{\mathscr{B}}{\sim} g \Rightarrow\ g \underset{\mathscr{B}}{\sim} f$
3) $f \underset{\mathscr{B}}{\sim} g$ y $g \underset{\mathscr{B}}{\sim} h\ \Rightarrow\ f \underset{\mathscr{B}}{\sim} h.$
4) $f \underset{\mathscr{B}}{\sim} g$ y $f\,g \neq 0$ en algún $\mathbf{E} \in \mathscr{B}\ \ \Rightarrow \dfrac{1}{f} \underset{\mathscr{B}}{\sim} \dfrac{1}{g}.$

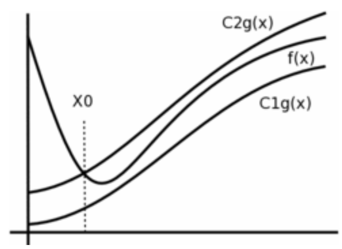
Es decir, la equivalencia asintótica es una relación de equivalencia.

Demostración. Para $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{B}_1 \cap \boldsymbol{B}_2 \cap \boldsymbol{B}_3$, se tiene,

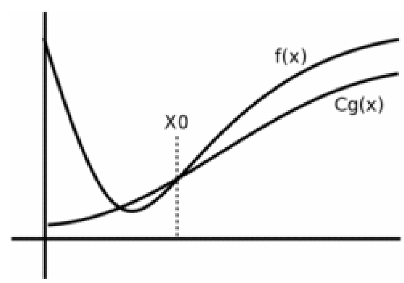
1) $f \underset{\mathscr{B}}{=} \gamma \cdot f \Leftrightarrow f \underset{\mathscr{B}}{\sim} f$ (teorema anterior).
2) $f \underset{\mathscr{B}}{\sim} g \Leftrightarrow f \underset{\mathscr{B}}{=} \gamma\, g \underset{\mathscr{B}}{=} \dfrac{1}{\gamma} g \Leftrightarrow g \underset{\mathscr{B}}{=} \gamma\, f \Leftrightarrow g \underset{\mathscr{B}}{\sim} f.$
3) Sean $f \underset{\mathscr{B}}{\sim} g$ y $g \underset{\mathscr{B}}{\sim} h$, esto es, $f \underset{\mathscr{B}}{=} \gamma\, g$ y $g \underset{\mathscr{B}}{=} \gamma\, h$. Entonces,
   $f \underset{\mathscr{B}}{=} \gamma\, g \underset{\mathscr{B}}{=} \gamma\,\gamma\, h \underset{\mathscr{B}}{=} \gamma\, h \Leftrightarrow f \underset{\mathscr{B}}{\sim} h.$
4) Como $f\,g \neq 0$ en algún $\mathbf{E} \in \mathscr{B}$, $f \underset{\mathscr{B}}{\sim} g \Leftrightarrow g \underset{\mathscr{B}}{=} \gamma\, f \Leftrightarrow \dfrac{1}{f} \underset{\mathscr{B}}{=} \gamma \dfrac{1}{g} \Leftrightarrow \dfrac{1}{f} \underset{\mathscr{B}}{\sim} \dfrac{1}{g}.$ ■



COTA SUPERIOR ASINTÓTICA



COTA AJUSTADA ASINTÓTICA



COTA INFERIOR ASINTÓTICA

COTA SUPERIOR ASINTÓTICA

$$\mathrm{O}(g(\boldsymbol{x})) = \{f(\boldsymbol{x}) : \text{existen } c;\ \boldsymbol{x}_0 > 0 \text{ tales que } \forall\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{x}_0 : 0 \leq |f(\boldsymbol{x})| \leq c\ |g(\boldsymbol{x})|\}$$

5) La cota ajustada asintótica (notación Θ) tiene relación con las cotas asintóticas superior e inferior (notación Ω):
   $f(x) = \Theta(g(x))$ si y solo si $f(x) = O(g(x))$ y $f(x) = \Omega(x)$

COTA AJUSTADA ASINTÓTICA

$$\Theta(g(\boldsymbol{x})) = \{f(\boldsymbol{x}) : \text{existen } c_1;\ c_2;\ \boldsymbol{x}_0 > 0 \text{ tales que } \forall\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{x}_0 : 0 \leq c_1 g(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}) \leq c_2 g(\boldsymbol{x})\}$$

COTA INFERIOR ASINTÓTICA

$$\Omega(g(\boldsymbol{x})) = \{f(\boldsymbol{x}) : \text{existen } c;\ \boldsymbol{x}_0 > 0 \text{ tales que } \forall\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{x}_0 : 0 \leq c g(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x})\}$$

§ 5.3 LÍMITE DE UN MAPEO BAJO UNA BASE

Definición 9.3. Sea $\mathscr{B}$ una base de un conjunto $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ un mapeo definido en $\boldsymbol{A}$ y con valores en $\boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$. Un elemento $\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ ó $\boldsymbol{b} = \infty$ ó $\boldsymbol{b} = +\infty$ ó $\boldsymbol{b} = -\infty$) se llama límite del mapeo f en la base $\mathscr{B}$, lo que se escribe $\lim\limits_{\mathscr{B}} f(\boldsymbol{x}) \coloneqq \boldsymbol{b}$, si $f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b} \underset{\mathscr{B}}{=} o(1)$, es decir,

$$\lim_{\mathscr{B}} f(\boldsymbol{x}) \coloneqq \boldsymbol{b} \iff \lim_{\mathscr{B}} f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b} = 0 \iff f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b} \underset{\mathscr{B}}{=} o(1).$$

Reitérese que $\boldsymbol{b}$ puede ser $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ ó $\boldsymbol{b} = \infty$ ó $\boldsymbol{b} = +\infty$ ó $\boldsymbol{b} = -\infty$.

En particular, si $\boldsymbol{b} = 0$, se tiene $\lim\limits_{\mathscr{B}} f(\boldsymbol{x}) = 0 \iff f(\boldsymbol{x}) \underset{\mathscr{B}}{=} o(1)$. Además

$\lim\limits_{\mathscr{B}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \iff \forall\, \mathbf{U}(\boldsymbol{b})\ \exists\, \mathbf{E} \in \mathscr{B} \mid f(\mathbf{E}) \subseteq \mathbf{U}(\boldsymbol{b})$, es decir, $f(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{U}(\boldsymbol{b})\ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbf{E}$,

ó bien, $\lim\limits_{\mathscr{B}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \mathbf{E} \in \mathscr{B} \mid |f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}| < \varepsilon \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbf{E}$.

Como se ha visto, una base $\mathscr{B}$ de un conjunto $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$ forma una familia dirigida sin último elemento con la inclusión inversa $(\mathscr{B}, \supseteq)$. Además, se puede ver también, que cualquier familia $\mathscr{A}(\cdot)$ de vecindades $\mathbf{E}(\cdot)$ forma una base y, una subfamilia $\mathscr{B}(\cdot)$ de $\mathscr{A}(\cdot)$ formada con las vecindades simétricas (ó bolas) de $\mathscr{A}(\cdot)$, también forma una base; y como se había visto antes**,** forma un subconjunto confinal de $\mathscr{A}(\cdot)$.

Teorema 6.3. Sea $f\colon \boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ un mapeo definido en un conjunto $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$. Sea $\mathscr{A}(\cdot)$ una familia de vecindades $\mathbf{E}(\cdot)$ y sea $\mathscr{B}(\cdot)$ la subfamilia $\mathscr{B}(\cdot)$ de $\mathscr{A}(\cdot)$ formada con las vecindades simétricas de $\mathscr{A}(\cdot)$. Entonces

$$\lim_{(\mathscr{A},\, \supseteq)} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \text{ si, sólo si } \lim_{(\mathscr{B},\, \supseteq)} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}.$$

Demostración. Si $\lim\limits_{(\mathscr{A},\, \supseteq)} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$, entonces $\lim\limits_{(\mathscr{B},\, \supseteq)} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ se deduce del teorema 2.3, es decir, para cualquier vecindad $\mathbf{U}(\boldsymbol{b})$ existe un entorno $\mathbf{E}_{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2}(\cdot) \in \mathscr{A}(\cdot)$ (pudiendo ser $\boldsymbol{r}_1 \neq \boldsymbol{r}_2$), tal que $f(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{U}(\boldsymbol{b})\ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbf{E}_{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2}(\cdot)$. Como $\mathscr{B}(\cdot) \subseteq \mathscr{A}(\cdot)$ es una subfamilia confinal de $\mathscr{A}(\cdot)$, entonces existe un elemento de $\mathscr{B}(\cdot)$, a saber, $\mathbf{E}_{\boldsymbol{r}}(\cdot)$ en donde $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{min}\ \{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2\}$; tal que $\mathbf{E}_{\boldsymbol{r}}(\cdot) \subset \mathbf{E}_{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2}(\cdot)$, y por lo tanto $f(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{U}(\boldsymbol{b})\ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbf{E}_{\boldsymbol{r}}(\cdot) \in \mathscr{B}(\cdot)$, lo que significa que $\lim\limits_{(\mathscr{B},\, \supseteq)} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$.

Demostremos ahora que $\lim\limits_{(\mathscr{B},\, \supseteq)} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ implica $\lim\limits_{(\mathscr{A},\, \supseteq)} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$.

Supongamos que $\lim\limits_{(\mathscr{B},\, \supseteq)} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$, entonces para cualquier vecindad $\mathbf{U}(\boldsymbol{b})$ existe un elemento $\mathbf{E}_{\boldsymbol{r}}(\cdot) \in \mathscr{B}(\cdot) \subseteq \mathscr{A}(\cdot)$, tal que $f(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{U}(\boldsymbol{b})\ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbf{E}_{\boldsymbol{r}}(\cdot) \in \mathscr{A}(\cdot)$, lo que significa que $\lim\limits_{(\mathscr{A},\, \supseteq)} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$. ■

El teorema demostrado muestra que, en teoría de límites, es suficiente trabajar exclusivamente con familias de vecindades simétricas (bolas) y los resultados que se obtengan, se extienden a familias de vecindades no necesariamente simétricas.

§ 6.3 PROPIEDADES ALGEBRAICAS DE LOS LÍMITES

Teorema 11.3. Sean f, g: $A \to \mathbb{R}$ mapeos tales que $\lim\limits_{\mathscr{B}} f(x) = b_1$ y $\lim\limits_{\mathscr{B}} g(x) = b_2$. Entonces

1) $\lim\limits_{\mathscr{B}} (f \pm g)(x) = \lim\limits_{\mathscr{B}} f(x) \pm \lim\limits_{\mathscr{B}} g(x)$.
2) $\lim\limits_{\mathscr{B}} (fg)(x) = \lim\limits_{\mathscr{B}} f(x) \ \lim\limits_{\mathscr{B}} g(x)$.
3) $\lim\limits_{\mathscr{B}} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{\mathscr{B}} f(x)}{\lim\limits_{\mathscr{B}} g(x)}$ si $b_2 \neq 0$.

Demostración.

$$\lim_{\mathscr{B}} f(x) = b_1 \iff f(x) - b_1 \underset{\mathscr{B}}{=} o(1).$$
$$\lim_{\mathscr{B}} g(x) = b_2 \iff g(x) - b_2 \underset{\mathscr{B}}{=} o(1).$$

1) $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \underset{\mathscr{B}}{=} (b_1 + o(1)) \pm (b_2 + o(1)) \underset{\mathscr{B}}{=} (b_1 \pm b_2) + (o(1) \pm o(1)) \underset{\mathscr{B}}{=}$ $\underset{\mathscr{B}}{=} (b_1 \pm b_2) + o(1)$, esto es $(f \pm g)(x) - (b_1 \pm b_2) = o(1)$, o sea

$$\lim_{\mathscr{B}} (f \pm g)(x) = b_1 \pm b_2 = \lim_{\mathscr{B}} f(x) \pm \lim_{\mathscr{B}} g(x).$$

2) $(fg)(x) = f(x)\, g(x) \underset{\mathscr{B}}{=} (b_1 + o(1))(b_2 + o(1)) \underset{\mathscr{B}}{=} b_1b_2 + (b_1 + b_2)\, o(1) + o(1)o(1) \underset{\mathscr{B}}{=}$ $\underset{\mathscr{B}}{=} b_1b_2 + o(1) + o(1) \underset{\mathscr{B}}{=} b_1b_2 + o(1)$, esto es $(fg)(x) - (b_1b_2) \underset{\mathscr{B}}{=} o(1)$, o sea

$$\lim_{\mathscr{B}} (fg)(x) = b_1b_2 = \lim_{\mathscr{B}} f(x)\ \lim_{\mathscr{B}} g(x).$$

3)
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \underset{\mathscr{B}}{=} \frac{b_1 + o(1)}{b_2 + o(1)} \underset{\mathscr{B}}{=} \frac{b_1}{b_2 + o(1)} + \frac{o(1)}{b_2 + o(1)} \underset{\mathscr{B}}{=} \frac{b_1}{b_2}\frac{1}{1 + \frac{o(1)}{b_2}} + \frac{o(1)}{b_2}\frac{1}{1 + \frac{o(1)}{b_2}} \underset{\mathscr{B}}{=}$$
$$\underset{\mathscr{B}}{=} \frac{b_1}{b_2}\frac{1}{1 + o(1)} + o(1)\frac{1}{1 + o(1)} \underset{\mathscr{B}}{=} \left(\frac{b_1}{b_2} + o(1)\right)\frac{1}{1 + o(1)} \underset{\mathscr{B}}{=} \left(\frac{b_1}{b_2} + o(1)\right)(1 + o(1)) \underset{\mathscr{B}}{=}$$
$$\underset{\mathscr{B}}{=} \frac{b_1}{b_2} + \left(\frac{b_1}{b_2} + 1\right)o(1) + o(1)\,o(1) \underset{\mathscr{B}}{=} \frac{b_1}{b_2} + o(1), \text{ esto es } \left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{b_1}{b_2}\right) = o(1), \text{ o sea}$$
$$\lim_{\mathscr{B}} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{b_1}{b_2} = \frac{\lim\limits_{\mathscr{B}} f(x)}{\lim\limits_{\mathscr{B}} g(x)}. \ \blacksquare$$

Teorema 12.3. Sea g: $B \to C \subseteq \mathbb{R}$ un mapeo definido en un conjunto $B \subseteq \mathbb{R}$ cuya base es $\mathscr{B}_B$ tal que $\lim\limits_{\mathscr{B}_B} g(y) = c$ y sea f: $A \to B$ un mapeo definido en un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ cuya base es $\mathscr{B}_A$ tal que $\forall$ $\mathbf{U} \in \mathscr{B}_B$ $\exists$ $\mathbf{E} \in \mathscr{B}_A$ $\mid$ $f(\mathbf{E}) \subseteq \mathbf{U}$. Entonces

$$\lim_{\mathscr{B}_A} (g \circ f)(x) = c, \text{ donde } y = f(x).$$

Demostración. La composición $g \circ f$: $A \to \mathbb{R}$ está definida puesto que $f(A) \subseteq B$. Como $\lim\limits_{\mathscr{B}_B} g(y) = c$, entonces para cualquier vecindad $\mathbf{V}(c)$ de $c \in \mathbb{R}$ existe un elemento $\mathbf{U}$ de la base $\mathscr{B}_B$ tal que $g(\mathbf{U}) \subseteq \mathbf{V}(c)$. Por las condiciones del teorema, existe un elemento $\mathbf{E}$ de la base $\mathscr{B}_A$ tal que $f(\mathbf{E}) \subseteq \mathbf{U}$. Entonces se tiene $(g \circ f)(\mathbf{E}) = (g(f(\mathbf{E})) \subseteq g(\mathbf{U}) \subseteq \mathbf{V}(c)$, es decir

$$\lim_{\mathscr{B}_A} (g \circ f)(x) = \lim_{\mathscr{B}_A} g(f(x)) = \lim_{\mathscr{B}_B} g(y) = c. \ \blacksquare$$

§ 7.3 Teoremas Fundamentales Sobre Límites

Teorema 7.3 (Sustitución de mapeos asintóticamente equivalentes). Sea $\mathscr{B}_A$ una base de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ y sean $\bar{g}$, g, f: $A \to B \subseteq \mathbb{R}$ mapeos definidos en A y con valores en $B \subseteq \mathbb{R}$ tales que $g \underset{\mathscr{B}}{\sim} \bar{g}$. Entonces

1) Si $\lim\limits_{\mathscr{B}} (f\,\bar{g})(x) = b$, entonces $\lim\limits_{\mathscr{B}} (f\,g)(x) = b$; y
2) si $\bar{g} \neq 0$ en algún $\mathbf{E} \in \mathscr{B}$ y $\lim\limits_{\mathscr{B}} \left(\dfrac{f}{\bar{g}}\right)(x) - b$, entonces $\lim\limits_{\mathscr{B}} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) - b$.

Demostración. En general, para cualquier base $b \underset{\mathscr{B}}{=} \gamma\, b$ $(\gamma \underset{\mathscr{B}}{\sim} 1)$. Además, como

$g \underset{\mathscr{B}}{\sim} \bar{g} \Leftrightarrow g \underset{\mathscr{B}}{=} \gamma\, \bar{g}$ y si $g\,\bar{g} \neq 0$, $g \underset{\mathscr{B}}{\sim} \bar{g} \Leftrightarrow \dfrac{1}{g} \underset{\mathscr{B}}{=} \gamma\, \dfrac{1}{\bar{g}}$; se tiene,

1) $f\,g - b \underset{\mathscr{B}}{=} f\,\gamma\,\bar{g} - \gamma\, b \underset{\mathscr{B}}{=} \gamma\,(f\,\bar{g} - b) \underset{\mathscr{B}}{=} (1 + o(1))\, o(1) \underset{\mathscr{B}}{=} o(1)$, y
2) $\dfrac{f}{g} - b \underset{\mathscr{B}}{=} f\dfrac{1}{g} - b \underset{\mathscr{B}}{=} f\,\gamma\,\dfrac{1}{\bar{g}} - \gamma\, b \underset{\mathscr{B}}{=} \gamma\,(\dfrac{f}{\bar{g}} - b) \underset{\mathscr{B}}{=} (1 + o(1))\, o(1) \underset{\mathscr{B}}{=} o(1)$. ■

Observación. Esta afirmación se puede aplicar en en general para los mapeos adición y sustracción, es decir, $\lim\limits_{\mathscr{B}} (f \pm \bar{g})(x) = b$, no implica $\lim\limits_{\mathscr{B}} (f \pm g)(x) = b$. Ejemplo, como se verá adelante cuando $x \to 0$, $\tan(x) \sim x$ y $\operatorname{sen}(x) \sim x$, sin embargo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^3} \neq \lim_{x\to 0} \frac{x - x}{x^3}.$$

Teorema 7.3. Sea f: $A \to \mathbb{R}$ y $\mathscr{B}$ una base de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$.

1) Si f es finalmente constante igual a b en $\mathscr{B}$, entonces $\lim\limits_{\mathscr{B}} f(x) = b$.
2) Si $\exists \lim\limits_{\mathscr{B}} f(x) = b$, entonces f es finalmente acotada en $\mathscr{B}$, es decir $f \underset{\mathscr{B}}{=} O(1)$.
3) Si $\lim\limits_{\mathscr{B}} f(x) = b_1$ y $\lim\limits_{\mathscr{B}} f(x) = b_2$, entonces $b_1 = b_2$ (ver el teorema de unicidad).

Demostración.

1) $\exists\, \mathbf{E} \in \mathscr{B} \,|\, f(x) = b \;\; \forall\, x \in B$, es decir, $f(x) \underset{\mathscr{B}}{=} b$, por lo tanto $f(x) - b \underset{\mathscr{B}}{=} o(1)$.
2) $\lim\limits_{\mathscr{B}} f(x) = b \iff f(x) - b \underset{\mathscr{B}}{=} o(1) \iff f(x) \underset{\mathscr{B}}{=} o(1) + b \underset{\mathscr{B}}{=} O(1)$.
3) Supóngase que $b_1 \neq b_2$. Tómense $\mathbf{V}(b_1)$ y $\mathbf{V}(b_2)$ tales que $\mathbf{V}(b_1) \cap \mathbf{V}(b_2) = \varnothing$.

$\lim\limits_{\mathscr{B}} f(x) = b_1$ y $\lim\limits_{\mathscr{B}} f(x) = b_2 \Rightarrow \exists\, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \in \mathscr{B} \;\big|\; f(\mathbf{E}_1) \subset \mathbf{V}(b_1)$ y $f(\mathbf{E}_2) \subset \mathbf{V}(b_2)$.

Como $\mathscr{B}$ es una base, entonces $\exists\, \mathbf{E} \in \mathscr{B} \,\big|\, \mathbf{E} \subset \mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2$. Entonces $f(\mathbf{E}) \subset f(\mathbf{E}_1) \cap f(\mathbf{E}_2)$.

Como $\mathbf{E} \neq \varnothing$, entonces $f(\mathbf{E}) \neq \varnothing$ y por lo tanto $f(\mathbf{E}_1) \cap f(\mathbf{E}_2) \neq \varnothing$. Pero esto es imposible porque $f(\mathbf{E}_1) \cap f(\mathbf{E}_2) \subset \mathbf{V}(b_1) \cap \mathbf{V}(b_2) = \varnothing$. Con esta contradicción queda demostrado el teorema. ■

Teorema 8.3. Sean f, g: $A \to \mathbb{R}$ tales que $\lim\limits_{\mathscr{B}} f(x) = b_1 < b_2 = \lim\limits_{\mathscr{B}} g(x)$. Entonces $\exists\, \mathbf{E} \in \mathscr{B} \;\big|\; \forall\, x \in \mathbf{E}$ se cumple la desigualdad

$$f(x) < g(x).$$

Demostración. $\lim\limits_{\mathscr{B}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}_1 \Leftrightarrow f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}_1 \underset{\mathscr{B}}{=} o(1).$

$\lim\limits_{\mathscr{B}} g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}_2 \Leftrightarrow g(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}_2 \underset{\mathscr{B}}{=} o(1).$

Como $\boldsymbol{b}_1 < \boldsymbol{b}_2$, entonces $f(\boldsymbol{x}) \underset{\mathscr{B}}{=} \boldsymbol{b}_1 + o(1) < \boldsymbol{b}_2 + o(1) \underset{\mathscr{B}}{=} g(\boldsymbol{x})$, es decir, $f(\boldsymbol{x}) < g(\boldsymbol{x})$ en algún $\mathbf{E} \in \mathscr{B}$. ■

Teorema 9.3. Sean f, g: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ mapeos tales que $f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$ $\forall$ $\boldsymbol{x} \in \mathbf{E}$ de algún $\mathbf{E} \in \mathscr{B}$ y $\lim\limits_{\mathscr{B}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$. Entonces $\lim\limits_{\mathscr{B}} g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$.

Demostración. $\lim\limits_{\mathscr{B}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b} \underset{\mathscr{B}}{=} o(1).$

Como $f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$ $\forall$ $\boldsymbol{x} \in \mathbf{E}$ de algún $\mathbf{E} \in \mathscr{B}$, entonces en este $\mathbf{E} \in \mathscr{B}$, se tiene $f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b} \underset{\mathscr{B}}{=} g(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b} \underset{\mathscr{B}}{=} o(1)$, esto es, $\lim\limits_{\mathscr{B}} g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$. ■

Teorema 10.3. Sean f, g, h: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ tales que $f \leq h \leq g$ en $\mathscr{B}$ y $\lim\limits_{\mathscr{B}} f(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{\mathscr{B}} g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$. Entonces $\lim\limits_{\mathscr{B}} h(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$.

Demostración. $\lim\limits_{\mathscr{B}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b} \underset{\mathscr{B}}{=} o(1).$

$\lim\limits_{\mathscr{B}} g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow g(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b} \underset{\mathscr{B}}{=} (1).$

Como $f \leq h \leq g$ en $\mathscr{B}$, se tiene $o(1) \underset{\mathscr{B}}{=} f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b} \leq h(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b} \leq g(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b} \underset{\mathscr{B}}{=} o(1).$

Por lo tanto $h(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b} = o(1)$ en $\mathscr{B}$. Esto significa que $\lim\limits_{\mathscr{B}} h(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$. ■

Límite de una Sucesión. El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales que es un conjunto bien ordenado y no acotado; y por lo tanto es un conjunto dirigido sin último elemento. Una sucesión de los elementos de $\boldsymbol{X}$ es un mapeo f: $\mathbb{N} \to \boldsymbol{X}$ cuyo dominio de definición es el conjunto $\mathbb{N}$ (en el cual $f(\boldsymbol{n}) =: \boldsymbol{x_n} \in \boldsymbol{X}$), entonces, como caso particular, se tiene la siguiente definición:

Definición 10.3. El número $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ se llama límite de la sucesión $\{\boldsymbol{x_n}\}$, lo que se escribe $\lim\limits_{(\mathbb{N}, \leq)} f(\boldsymbol{n}) \coloneqq \boldsymbol{b}$; si para cada entorno $\mathbf{E}(\boldsymbol{b})$, existe un $\boldsymbol{n}_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\boldsymbol{x_n} \in \mathbf{E}(\boldsymbol{b})$ $\forall$ $\boldsymbol{n} > \boldsymbol{n}_0$.

Es decir, $\lim\limits_{(\mathbb{N}, \leq)} f(\boldsymbol{n}) \coloneqq \boldsymbol{b}$ (lo que es más usual escribir como $\lim\limits_{\boldsymbol{n} \to \infty} \boldsymbol{x_n} \coloneqq \boldsymbol{b}$) si para cualquier vecindad $\mathbf{E}(\boldsymbol{b})$ de $\boldsymbol{b}$, el conjunto $\{ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} \mid \boldsymbol{x_n} \notin \mathbf{E}(\boldsymbol{b})\}$ no es un subconjunto confinal de $(\mathbb{N}, \leq)$, lo cual implica que todos los $\boldsymbol{x_n}$ posteriores a $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}_0}$, es decir, una cantidad infinita, quedan contenidos en $\mathbf{E}(\boldsymbol{b})$; y todos los $\boldsymbol{x_n}$ anteriores a $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}_0}$, es decir, sólo una cantidad finita, quedan fuera de $\mathbf{E}(\boldsymbol{b})$.

Definición 11.3. Si existe el límite $\lim\limits_{(\mathbb{N}, \leq)} \boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{b}$, se dice entonces que la sucesión $\{\boldsymbol{x_n}\}$ converge a $\boldsymbol{b}$. Si la sucesión $\{\boldsymbol{x_n}\}$ tiene límite, se llama convergente; y si no tiene límite, se llama divergente.

§ 8.3 Diferentes Formas de Definir el Límite de un Mapeo

Definición 1.3 (Límite bajo un Conjunto Dirigido). Sea $(\boldsymbol{A}, \precsim)$ conjunto dirigido sin último elemento y sea $f\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$ un mapeo definido en $\boldsymbol{A}$. Un elemento $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ se llama límite del mapeo f, bajo el conjunto $(\boldsymbol{A}, \precsim)$, lo que se escribe $\lim\limits_{(\boldsymbol{A},\precsim)} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$, si para cualquier vecindad $\mathbf{E}(\boldsymbol{b})$ del punto $\boldsymbol{b}$ existe un elemento $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{A}$, tal que $f(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{E}(\boldsymbol{b})$ para todo $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ tal que $\boldsymbol{x} \succsim \tilde{\boldsymbol{x}}$.

$$\lim_{(\boldsymbol{A},\precsim)} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \iff \forall\, \mathbf{E}(\boldsymbol{b})\ \exists\, \tilde{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{A} \mid f(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{E}(\boldsymbol{b})\ \ \forall\, \boldsymbol{x} \succsim \tilde{\boldsymbol{x}},\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$$

Como una base $\mathscr{B}$ de un conjunto $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$ forma una familia dirigida sin último elemento con la inclusión inversa, se tiene el siguiente caso particular:

Definición 9.3 (Límite bajo una Base). Sea $f\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$ un mapeo definido en un conjunto $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$, y sea $\mathscr{B}$ una base de $\boldsymbol{A}$. Un elemento $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ se llama límite del mapeo f en la base $\mathscr{B}$, lo que se escribe $\lim\limits_{\mathscr{B}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$, si para cualquier vecindad $\mathbf{E}(\boldsymbol{b})$ del punto $\boldsymbol{b}$ existe un elemento $\boldsymbol{B}$ de la base $\mathscr{B}$ tal que $f(\boldsymbol{B}) \subset \mathbf{E}(\boldsymbol{b})$, es decir,

$$\lim_{\mathscr{B}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \iff f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b} \underset{\mathscr{B}}{=} \mathrm{o}(1) \iff \forall\, \mathbf{E}(\boldsymbol{b})\ \exists\, \boldsymbol{B} \in \mathscr{B} \mid f(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{E}(\boldsymbol{b})\ \ \forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}.$$

La definiciones de límite de un mapeo bajo un conjunto dirigido y bajo una base son muy generales. La definición de Cauchy, en cambio, requiere definiciones separadas para cada caso, cuando: $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{x} \to \infty$; $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{b} = \infty$; por lo que muchos de los teoremas exigen demostraciones por separado. Las definiciones de Cauchy, para cuando $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$, y cuando $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{x} \to \infty$, son:

Definición 12.3 (Cauchy). Sea $f\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$ un mapeo y sea $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$ un punto de acumulación de $\boldsymbol{A}$. Un elemento $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ se llama límite del mapeo f cuando $\boldsymbol{x}$ tiende a $\boldsymbol{a}$, lo que se escribe como $\lim\limits_{\boldsymbol{A} \ni \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}| < \varepsilon$ cuando $0 < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \delta$, es decir,

$$\lim_{\boldsymbol{A} \ni \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \mid |f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \delta.$$

De acuerdo a lo antes visto, esta definición de Cauchy, se puede sustituir por la siguiente:

Definición 12.3.A. Sea $f\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$ un mapeo y sea $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$ un punto de acumulación de $\boldsymbol{A}$. Un elemento $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ se llama límite del mapeo $f\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ cuando $\boldsymbol{x}$ tiende a $\boldsymbol{a}$, lo que se escribe como $\lim\limits_{\boldsymbol{A} \ni \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$, si $f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b} = \mathrm{o}(1)$ cuando $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = \mathrm{o}(1)$, para $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ o sea,

$$\lim_{\boldsymbol{A} \ni \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) \coloneqq \boldsymbol{b} \iff f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b} = \mathrm{o}(1) \text{ cuando } \boldsymbol{A} \ni \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = \mathrm{o}(1).$$

Definición 13.3 (Cauchy). Sea $f\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$ un mapeo definido en el conjunto $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$. Un elemento $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ se llama límite del mapeo $f\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ cuando $\boldsymbol{x}$ tiende a ∞, lo que se escribe como $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \infty} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}| < \varepsilon$ siempre que $|\boldsymbol{x}| > \dfrac{1}{\delta}$, es decir, $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \infty} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \mid |f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}| < \varepsilon$ siempre que $|\boldsymbol{x}| > \dfrac{1}{\delta}$.

Definición 14.3 (Heine). Sea f: $A \to B \subseteq \mathbb{R}$ un mapeo y sea $a \in A \subseteq \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A. Un elemento $b \in \mathbb{R}$ se llama límite del mapeo f cuando x tiende a a, lo que se escribe como $\lim_{A \ni x \to a} f(x) = b$, si para cualquier sucesión $\{x_n\} \subseteq A$ que sea convergente hacia a, la correspondiente sucesión de los valores del mapeo $\{f(x_n)\}$ converge hacia b, es decir, si

$$\forall \text{ sucesión } \{x_n\} \subseteq A,\ \lim_{(\mathbb{N}, \leq)} x_n = a \implies \lim_{(\mathbb{N}, \leq)} f(x_n) = b.$$

Teorema 13.3. Las definiciones de límite de Cauchy y de Heine son equivalentes.

Demostración. Supongamos que $\lim_{A \ni x \to a} f(x) = b$ según de Cauchy. Entonces

$$\forall\ \mathbf{E}_\varepsilon(b)\ \exists\ \overset{\circ}{\mathbf{E}}_\delta(a) \mid f(x) \in \mathbf{E}_\varepsilon(b) \text{ siempre que } x \in \overset{\circ}{\mathbf{E}}_\delta(a).$$

Sea $\{x_n\} \subseteq A$ cualquier sucesión convergente hacia a, es decir s: $\mathbb{N} \to A$. Por la definición de límite de una sucesión $\exists\ n_\delta \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq n_\delta$, se tiene $x_n \in \overset{\circ}{\mathbf{E}}_\delta(a)$, de donde, por la definición de Cauchy, se sigue que $f(x_n) \in \mathbf{E}_\varepsilon(b)$. Por lo tanto

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\delta \mid \forall\ n \geq n_\delta$ se tiene $f(x_n) \in \mathbf{E}_\varepsilon(b)$, es decir, $\lim_{(\mathbb{N}, \leq)} f(x_n) = b$, lo que significa que $\lim_{A \ni x \to a} f(x) = b$ según Heine.

Por el límite de la composición de mapeos $\lim_{(\mathbb{N}, \leq)} (f \circ s)(x_n) = b$. Por lo tanto

$\lim_{(\mathbb{N}, \leq)} (f \circ s)(n) = \lim_{(\mathbb{N}, \leq)} f(s(n)) = \lim_{(\mathbb{N}, \leq)} f(x_n) = b$, lo que significa que $\lim_{A \ni x \to a} f(x) = b$ según Heine.

Recíprocamente. Supongamos que $\lim_{A \ni x \to a} f(x) = b$ según de Heine. Por reducción al absurdo, supongamos que $b \neq \lim_{A \ni x \to a} f(x)$ según de Cauchy, es decir, que

$$\exists\ \mathbf{E}_\varepsilon(b) \mid \forall\ \overset{\circ}{\mathbf{E}}_\delta(a)\ \exists\ x \in \overset{\circ}{\mathbf{E}}_\delta(a), \text{ pero que } f(x) \notin \mathbf{E}_\varepsilon(b).$$

En particular, para cada $\delta > 0$ existe una $x_n \in \overset{\circ}{\mathbf{E}}_{\frac{\delta}{n}}(a)$, tal que $f(x_n) \notin \mathbf{E}_\varepsilon(b)$. Por lo tanto $\lim_{(\mathbb{N}, \leq)} x_n = a$, pero $\lim_{(\mathbb{N}, \leq)} f(x_n) \neq b$, por lo que b no es el límite de $f(x)$ según Heine. Esta contradicción completa la demostración. ■

Teorema 26.3 (Heine). $\lim_{A \ni x \to a} f(x) = b$ si, y sólo si para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de puntos $x_n \in A - \{a\}$, que converge hacia a, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge hacia b, es decir,

$$\lim_{A \ni x \to a} f(x) = b \iff \lim_{n \to \infty} f(x_n) = b\ \ \forall\ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}},\ x_n \in A - \{a\} \mid \lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

Demostración. La primera parte, es decir, $\lim_{A \ni x \to a} f(x) = b \implies \lim_{n \to \infty} f(x_n) = b$ se deduce directamente de la definición. Además se puede ver que $\{x_n\}$ es un subconjunto confinal de $\overset{\circ}{\mathbf{E}}_A(a)$. Si $\lim_{A \ni x \to a} f(x) = b$, entonces para cualquier vecindad $\mathbf{U}(b)$ del punto b existe una vecindad perforada $\overset{\circ}{\mathbf{E}}_A(a)$ del punto a en A, tal que $\forall\ x_n \in \overset{\circ}{\mathbf{E}}_A(a)$ se tiene $f(x_n) \in \mathbf{U}(b)$.

Para demostrar la parte inversa del teorema, procedemos por reducción al absurdo. Suponiendo que $\boldsymbol{b} \neq \lim\limits_{A \ni x \to a} f(\boldsymbol{x})$, entonces existe una vecindad $\mathbf{U}(\boldsymbol{b})$ tal que, para cualquier $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, en la vecindad $\overset{\circ}{\mathbf{E}}_{\frac{1}{n}}(\boldsymbol{a})$ de radio $\dfrac{1}{\boldsymbol{n}}$ se encuentra un punto $\boldsymbol{x_n} \in \overset{\circ}{\mathbf{E}}_{\frac{1}{n}}(\boldsymbol{a})$ pero que $f(\boldsymbol{x_n}) \notin \mathbf{U}(\boldsymbol{b})$. Esto significa que $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{a}$, pero que $\lim\limits_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x_n}) \neq \boldsymbol{b}$. ■

§ 9.3 SUCESIONES

Definición 15.3. La sucesión $\{\boldsymbol{x_n}\}$ se llama fundamental (ó sucesión de Cauchy), si para cualquier vecindad $\mathbf{E}_{\boldsymbol{r}}(0)$ de $0 \in \mathbb{R}$ existe un $\boldsymbol{n}_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\boldsymbol{x_m} - \boldsymbol{x_n} \in \mathbf{E}_{\boldsymbol{r}}(0)$ siempre que $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} > \boldsymbol{n}_0$.

Teorema 14.3. (Criterio de Cauchy). Una sucesión numérica es convergente si, y sólo si es fundamental.

Demostración. Supongamos que $\lim\limits_{(\mathbb{N}, \leq)} \boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{b}$. Para $\boldsymbol{r} > 0$ se encuentra un número $\boldsymbol{n}_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\boldsymbol{x_n} - \boldsymbol{b} \in \mathbf{E}_{\frac{r}{2}}(0)$, es decir, $|\,\boldsymbol{x_n} - \boldsymbol{b}\,| < \dfrac{\boldsymbol{r}}{2}$ siempre que $\boldsymbol{n} > \boldsymbol{n}_0$. Para $\boldsymbol{m} > \boldsymbol{n}_0$ y $\boldsymbol{n} > \boldsymbol{n}_0$, se tiene

$$|\,\boldsymbol{x_m} - \boldsymbol{x_n}\,| \leq |\,\boldsymbol{x_m} - \boldsymbol{b}\,| + |\,\boldsymbol{x_n} - \boldsymbol{b}\,| < \frac{\boldsymbol{r}}{2} + \frac{\boldsymbol{r}}{2} = \boldsymbol{r},$$

lo que significa que $\boldsymbol{x_m} - \boldsymbol{x_n} \in \mathbf{E}_{\boldsymbol{r}}(0)$, siempre que $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} > \boldsymbol{n}_0$.

Supongamos ahora que $\{\boldsymbol{x_n}\}$ es una sucesión fundamental. Para cada $\boldsymbol{r} > 0$ se encuentra un $\boldsymbol{n}_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\,\boldsymbol{x_m} - \boldsymbol{x_k}\,| < \dfrac{\boldsymbol{r}}{3}$. Si fijamos el número $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}_0$ se tiene que para todo $\boldsymbol{k} > \boldsymbol{n}_0$

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}_0} - \frac{\boldsymbol{r}}{3} < \boldsymbol{x_n} < \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}_0} + \frac{\boldsymbol{r}}{3},$$

como sólo existe un número finito de elementos de la sucesión $\{\boldsymbol{x_n}\}$ no mayores que $\boldsymbol{n}_0$, se sigue que la sucesión fundamental es acotada.

Para $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ denotemos $\boldsymbol{a_n} := \inf\limits_{k \geq n} \boldsymbol{x}_k$ y $\boldsymbol{b_n} := \sup\limits_{k \geq n} \boldsymbol{x}_k$.

De las definiciones se deduce que $\boldsymbol{a}_n \leq \boldsymbol{a}_{n+1} \leq \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{n}+1} \leq \boldsymbol{b_n}$. Para la sucesión de segmentos encajados $[\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b_n}]$ existe un punto en común $\boldsymbol{b}$ que es común a todos los segmentos.

Como $\forall\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}\ \boldsymbol{a}_n \leq \boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{b}_n$ y $\forall\ \boldsymbol{k} \geq \boldsymbol{n}\ \ \boldsymbol{a}_n = \inf\limits_{k \geq n} \boldsymbol{x}_k \leq \boldsymbol{x}_k \leq \boldsymbol{b_n} = \sup\limits_{k \geq n} \boldsymbol{x}_k$, entonces, para $\boldsymbol{k} \geq \boldsymbol{n}$ se tiene $|\,\boldsymbol{b} - \boldsymbol{x_n}\,| < \boldsymbol{b}_n - \boldsymbol{a}_n$.

Pero entonces, para $\boldsymbol{n} > \boldsymbol{n}_0$, se tiene $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}_0} - \dfrac{\boldsymbol{r}}{3} \leq \inf\limits_{k \geq n} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}_n \leq \boldsymbol{b_n} = \sup\limits_{k \geq n} \boldsymbol{x}_k \leq \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}_0} + \dfrac{\boldsymbol{r}}{3}$, por lo que, para $\boldsymbol{n} > \boldsymbol{m}$, se tiene $\boldsymbol{b_n} - \boldsymbol{a}_n \leq \dfrac{2\boldsymbol{r}}{3} < \dfrac{\boldsymbol{r}}{3}$.

Así pues, se ha encontrado que $\forall\ \boldsymbol{k} \geq \boldsymbol{n}_0$ se tiene $|\,\boldsymbol{b} - \boldsymbol{x_k}\,| < \boldsymbol{b_n} - \boldsymbol{a}_n < \boldsymbol{r}$, es decir, se ha demostrado que $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{b}$. ■

Definición 16.3. La sucesión $\{\boldsymbol{x_n}\}$ se llama creciente (decreciente), si $\forall\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, se tiene $\boldsymbol{x_n} < \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}+1}$ ($\boldsymbol{x_n} > \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}+1}$), y se llama no decreciente (no creciente), si $\forall\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, se tiene $\boldsymbol{x_n} \leq \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}+1}$ ($\boldsymbol{x_n} \geq \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}+1}$). Cualquiera de estos tipos de sucesión se llama monótona.

Definición 17.3. La sucesión $\{x_n\}$ se llama acotada superiormente (inferiormente), si $\exists$ M > 0 $\mid \forall\ n \in \mathbb{N}$, se tiene x_n < M (x_n > M). La sucesión $\{x_n\}$ se llama acotada si es acotada superiormente e inferiormente al mismo tiempo.

Teorema 15.3. (Weierstrass). Una sucesión no decreciente $\{x_n\}$ es convergente si, y sólo si es acotada superiormente.

Demostración. Supongamos que $\{x_n\}$ es convergente, es decir, que tiene límite $\lim\limits_{(\mathbb{N}, \leq)} x_n = b$. Entonces para $r = 1$ se encuentra un número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n > n_0$, se tiene

$$|\, x_n - b \,| < 1.$$

es decir, para $n > n_0$, $|\, x_n \,| < 1 + |\, b \,|$. Si se toma M > max{$|\, x \,|, \ldots, |\, x_n \,|, 1 + |\, b \,|$ }, se tiene que $\forall\ n > n_0$, $|\, x_n \,| <$ M, es decir, la sucesión $\{x_n\}$ es acotada.

Supongamos ahora que $\{x_n\}$ es acotada superiormente. Entonces $\{x_n\}$ tiene un extremo superior $c \coloneqq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$. Por las propiedades del extremo superior,

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ x_N \in \{x_n\} \mid c - \varepsilon < x_N \leq c$$

Como la sucesión $\{x_n\}$ no es decreciente, entonces $\forall\ n > N$, se tiene $c - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq c$, decir, $|\, c - x_n \,| = c - x_n < \varepsilon$. Por lo tanto, queda demostrado que $\lim\limits_{(\mathbb{N}, \leq)} x_n = c$.

Análogamente se puede demostrar que si la sucesión $\{x_n\}$ es acotada inferiormente y no es creciente, entonces es convergente. En este caso $\lim\limits_{(\mathbb{N}, \leq)} x_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\}$. ■

Ejemplos de sucesiones:

1) $\lim\limits_{(\mathbb{N}, \leq)} \dfrac{n}{q^n} = 0$, si $q > 1$; es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{q^n} = 0$, si $q > 1$.

Si $x_n \coloneqq \dfrac{n}{q^n}$, entonces $x_{n+1} = \dfrac{n+1}{nq} x_n$ para $n \in \mathbb{N}$.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{nq} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\dfrac{1}{q} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{q} = 1 \cdot \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{q} < 1$, entonces existe un $N > 0 \mid \forall\ n > N$, se tiene $\dfrac{n+1}{nq} < 1$, lo que significa que $\forall\ n > N$, se tiene $x_{n+1} < x_n$, es decir, después del elemento x_{n+1} la sucesión $\{x_n\}$ es monótona decreciente.

Por la definición de límite, un número finito de elementos de la sucesión no influye en la convergencia de la sucesión ni en su límite, entonces es suficiente encontrar el límite de la sucesión $x_{N+1} > x_{N+2} > \cdots$.

Los elementos de la sucesión son positivos, por lo que la sucesión es acotada inferiormente, y entonces tiene un límite.

Si $x \coloneqq \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, y como $x_{n+1} = \dfrac{n+1}{nq} x_n$, se tiene entonces

$x = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{nq} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{nq} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{q} x$, de donde se sigue que

$\left(1-\frac{1}{q}\right)x = 0$, es decir, $x = 0$.

2) Como consecuencia del problema anterior se tiene $\lim\limits_{(\mathbb{N},\le)} \sqrt[n]{n} = 1$, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Para un $\varepsilon > 0$ $\exists\, N \in \mathbb{N} \mid \forall\, n > N$, se tiene $1 \le n < (1+\varepsilon)^n$, es decir, $\forall\, n > N$, se tiene $1 \le \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$ y, por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

3) De los problema anteriores se deriva que si $a \ge 1$, entonces $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \forall\, n > N$, se tiene $1 \le a < (1+\varepsilon)^n$, es decir, $\forall\, n > N$, se tiene $1 \le \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$ y, por lo tanto $\lim\limits_{(\mathbb{N},\le)} \sqrt[n]{a} = 1$, o lo que es lo mismo, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Si ahora $0 < a < 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}} = \dfrac{1}{1} = 1$

4) $\lim\limits_{(\mathbb{N},\le)} \dfrac{q^n}{n!} = 0,\ \forall\, q \in \mathbb{R}$, esto es, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{n!} = 0,\ \forall\, q \in \mathbb{R}$.

Para $q = 0$, la afirmación es evidente. Como $\left|\dfrac{q^n}{n!}\right| = \dfrac{|q|^n}{n!}$, entonces es suficiente que se demuestre la afirmación para $q > 0$.

Como en el caso anterior, se tiene que $x_{n+1} = \dfrac{q}{n+1} x_n$. El conjunto de los números naturales no es acotado superiormente, por lo que $\exists\, N \in \mathbb{N} \mid \forall\, n > N$, se tiene $0 \le \dfrac{q}{n+1} < 1$, lo que significa que $\forall\, n > N$, se tiene $x_{n+1} < x_n$, esto es, la sucesión $\{x_n\}$ es monótona decreciente y como todos los elementos de la sucesión son positivos, entonces tiene un límite.

Si $x := \lim\limits_{(\mathbb{N},\le)} x_n$, y como $x_{n+1} = \dfrac{q}{n+1} x_n$, se tiene entonces

$$x = \lim_{(\mathbb{N},\le)} x_{n+1} = \lim_{(\mathbb{N},\le)} \frac{q}{n+1} x_n = \lim_{(\mathbb{N},\le)} \frac{q}{n+1} \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \cdot x = 0.$$

5) El número e.

Demostremos la existencia del límite $\lim\limits_{(\mathbb{N},\le)} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, demostrando primero que la sucesión $y_n := \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ es decreciente.

Para $n \ge 2$, utilizando la desigualdad de Bernoulli, se tiene

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^{2n}}{(n^2-1)}\cdot\frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n}\frac{n}{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)\frac{n}{n+1} \geq$$

$\geq \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{n}{n+1} = 1$ y como los elementos de la sucesión son positivos, entonces el límite $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ existe. Pero entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Definición 18.3.

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Definición 19.3. Si $f\colon \mathbb{N} \to B \subseteq \mathbb{R}$ es una sucesión, es decir, un mapeo definido en el conjunto ordenado de los números naturales $(\mathbb{N}, \leq)$, y $A \subseteq \mathbb{N}$ forma un subconjunto ordenado $(A, \leq)$ con el orden inducido de $\mathbb{N}$, entonces la restricción $f|_A$: se llama subsucesión de f.

Lema 1 (Bolzano–Weierstrass). Cada sucesión acotada de números reales contiene una subsucesión convergente.

Demostración. Sea B el conjunto de los valores de la sucesión acotada $\{x_n\}$. Si B es un conjunto finito, entonces existe al menos un punto $x \in B$, y un subconjunto ordenado $A := \{n_1, n_2, \ldots, \mid n_i < n_{i+1} \ \ \forall\, i \in \mathbb{N}\}$ con el orden inducido de $\mathbb{N}$, tal que $x_{n_1} = x_{n_2} = \cdots = x$. La subsucesión $\{x_{n_k}\}$ es constante y por lo tanto convergente.

Si B es un conjunto infinito, entonces, por el lema de Bolzano Weierstrass de la continuidad de los números reales, existe al menos un punto de acumulación $x \in \mathbb{R}$ de B, por lo que se puede elegir un $n_1 \in \mathbb{N} \mid |x_{n_1} - x| < 1$, un $n_2 \in \mathbb{N} \mid |x_{n_2} - x| < \frac{1}{2}$, …, un $n_k \in \mathbb{N} \mid |x_{n_k} - x| < \frac{1}{k}$, …, etc. Como $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0$, entonces la subsucesión $\{x_{n_k}\}$ converge hacia x. ■

Definición 20.3. El número $b = \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\geq n} x_k$ se llama límite superior de la sucesión $\{x_n\}$ y se denota por $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, x_k$, es decir, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, x_k := \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\geq n} x_k$

Definición 21.3. El número $b = \lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k\geq n} x_k$ se llama límite inferior de la sucesión $\{x_n\}$ y se denota por $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, x_k$, es decir, $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, x_k := \lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k\geq n} x_k$

Definición 22.3. El número $b \in \mathbb{R}$ (ó $b = +\infty$ ó $b = -\infty$) se llama límite parcial de una sucesión, si en ella existe una subsucesión que converge a b.

Teorema 16.3. Los límites superior e inferior de una sucesión acotada son correspondientemente el elemento maximal y minimal de sus límites parciales.

Demostración. Se demostrará para el límite superior. La demostración para el límite inferior es análoga.

Sea $s := \overline{\lim_{k\to\infty}} x_k$. Se sabe que la sucesión $s_n := \sup_{k\geq n} x_k$ no es creciente y que $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$.

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, al utilizar las propiedades del extremo superior, y por inducción, se pueden elegir números $k_n \in \mathbb{N}$ tales que $s_n - \frac{1}{n} < x_{k_n} \leq s_n \quad k_n < k_{n+1}$. Como $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(s_n - \frac{1}{n}\right) = s$, entonces, por las propiedades del límite, se puede afirmar que $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = s$, con lo que se demuestra que s es un límite parcial de la sucesión $\{ x_n \}$. Este es el máximo límite parcial, puesto que $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists\ n \in \mathbb{N} \mid s_n < s + \varepsilon$, esto es, $x_k \leq s_n = \sup_{k\geq n} x_k < s + \varepsilon \ \ \forall\ k \geq n$.

La desigualdad $x_k < s + \varepsilon$ para $k \geq n$ significa que ningún límite parcial de la sucesión puede ser mayor que $s + \varepsilon$. Pero $\varepsilon > 0$ es arbitrario, por lo que tampoco puede ser mayor que s. ■

Corolario. Para cualquier sucesión, el límite superior es el máximo de sus límites parciales y el límite inferior es el mínimo de sus límites parciales.

Corolario. Una sucesión tiene límite $b \in \mathbb{R}$ (ó $b = +\infty$ ó $b = -\infty$) si, y sólo si el límite superior y el límite inferior coinciden.

Demostración. Si $\overline{\lim_{k\to\infty}} x_k = \underline{\lim_{k\to\infty}} x_k = +\infty$ (ó $= -\infty$), entonces $\lim_{k\to\infty} x_k = +\infty$ (ó $= -\infty$).

Sea $\overline{\lim_{k\to\infty}} x_k = \underline{\lim_{k\to\infty}} x_k = b \in \mathbb{R}$. Como $i_n = \inf_{k\geq n} x_k \leq x_k \leq \sup_{k\geq n} x_k = s_n$ y $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} i_n = b$, entonces, por las propiedades del límite $\lim_{n\to\infty} x_n = b$. ■

Definición 23.3. La oscilación de un mapeo $f\colon A \to \mathbb{R}$ en un conjunto $D \subseteq A$, se llama al valor

$$\omega(f, D) := \sup_{x;\, x' \in D} |f(x) - f(x')|.$$

Teorema 17.3 (Criterio de Cauchy). Sea $\mathcal{B}$ una base de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$. El mapeo $f\colon A \to \mathbb{R}$ tiene un límite en la base $\mathcal{B}$ si, y sólo si la oscilación $\omega(f, \mathbf{E}) \underset{\mathcal{B}}{=} o(1)$, es decir

$$\exists \lim_{\mathcal{B}} f(x) = b \iff \forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists\ \mathbf{E} \in \mathcal{B} \ \mid \ \omega(f, \mathbf{E}) < \varepsilon.$$

Demostración. Sea $\lim_{\mathcal{B}} f(x) = b \in \mathbb{R}$. Entonces, para un elemento $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un elemento $\mathbf{E} \in \mathcal{B}$, tal que para todo $x \in \mathbf{E}$, se tenga $|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{3}$. Cuando $x, x' \in \mathbf{E}$, se tiene

$$|f(x) - f(x')| < |f(x) - b| + |f(x') - b| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

lo que demuestra que la oscilación $\omega(f, \mathbf{E}) < \varepsilon$.

Supongamos ahora que $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \mathbf{E} \in \mathscr{B}\ \big|\ \ \omega(f, \mathbf{E}) < \varepsilon$. Entonces constrúyase la sucesión $\varepsilon_1 \coloneqq 1$, $\varepsilon_2 \coloneqq \frac{1}{2}$, …, $\varepsilon_{\boldsymbol{n}} \coloneqq \frac{1}{\boldsymbol{n}}$, …, y para cada uno de estos valores se encuentran elementos correspondientes $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_{\boldsymbol{n}}, \dots$, de la base $\mathscr{B}$, tales que $\omega(f, \mathbf{U}_{\boldsymbol{n}}) < \varepsilon_{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.

Haciendo $\mathbf{E}_1 \coloneqq \mathbf{U}_1$, como $\mathscr{B}$ es una familia dirigida, $\exists\ \mathbf{E}_2 \in \mathscr{B}\ \big|\ \mathbf{E}_2 \subset \mathbf{E}_1 \cap \mathbf{U}_2$. Como $\mathbf{E}_2 \subset \mathbf{U}_2$, se tiene $\omega(f, \mathbf{E}_2) < \omega(f, \mathbf{U}_2) < \frac{1}{2}$. Repitiendo sucesivamente este procedimiento se obtiene por inducción la sucesión $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_{\boldsymbol{n}}, \dots$, de elementos de la base, tales que $\mathbf{E}_1 \supset \mathbf{E}_2 \supset \cdots \supset \mathbf{E}_{\boldsymbol{n}} \supset \cdots$, y $\omega(f, \mathbf{E}_{\boldsymbol{n}}) < \frac{1}{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.

Los elementos de la base no son vacíos, por lo que se puede construir una sucesión de puntos $\boldsymbol{x_n} \in \mathbf{E}_{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, de la que se obtiene una sucesión $\{f(\boldsymbol{x_n})\}$. Para $\varepsilon > 0$ se encuentra un número $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{\boldsymbol{n}} < \varepsilon$, y puesto que para $\boldsymbol{m} < \boldsymbol{k} < \boldsymbol{n}$, se tiene, $\mathbf{E}_{\boldsymbol{k}} \supset \mathbf{E}_{\boldsymbol{m}} \supset \mathbf{E}_{\boldsymbol{n}}$, resulta

$$\left|f(\boldsymbol{x_m}) - f(\boldsymbol{x_k})\right| \leq \omega(f, \mathbf{E}_n) < \frac{1}{\boldsymbol{n}} < \varepsilon.$$

lo que significa que la sucesión $\{f(\boldsymbol{x_n})\}$ es fundamental. Por el criterio de Cauchy, la sucesión $\{f(\boldsymbol{x_n})\}$ tiene un límite $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$. Falta demostrar que $\lim\limits_{\mathscr{B}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$.

Para un $\varepsilon > 0$ fijo, se encuentra un $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para $\boldsymbol{n} > N_1$, se tiene $\left|f(\boldsymbol{x_n}) - \boldsymbol{b}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Se encuentra ahora un $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N_2} < \frac{\varepsilon}{2}$, esto es, $\omega(f, \mathbf{E}_{N_2}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $N \coloneqq \max\{N_1, N_2\}$, entonces

$$\left|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}\right| \leq \left|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x_N})\right| + \left|f(\boldsymbol{x_N}) - \boldsymbol{b}\right| < \omega(f, \mathbf{E}_N) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{N} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \blacksquare$$

§ 10.3 SERIES

Definición 24.3. Sea $\{\boldsymbol{s_n}\}$ una sucesión de números reales (llamada sucesión real). Se llama serie infinita, ó suma de la sucesión $\{\boldsymbol{s_n}\}$, a la suma

$$\boldsymbol{S} \coloneqq \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\infty} \boldsymbol{s_i} \coloneqq \boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2 + \cdots + \boldsymbol{s_n} + \cdots.$$

Definición 25.3. El elemento de la sucesión $\boldsymbol{s_n} \in \{\boldsymbol{s_n}\}$ visto como elemento de la serie $\boldsymbol{S}$, se llaman $\boldsymbol{n}$-ésimo término de la serie

$$\boldsymbol{S} \coloneqq \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\infty} \boldsymbol{s_i} \coloneqq \boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2 + \cdots + \boldsymbol{s_n} + \cdots.$$

Definición 26.3. Sea $\{\boldsymbol{s_n}\}$ una sucesión real. Se llama serie finita, ó suma parcial de la sucesión de $\boldsymbol{n}$ términos; a la suma

$$\boldsymbol{S_n} \coloneqq \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{s_i} \coloneqq \boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2 + \cdots + \boldsymbol{s_n}$$

Definición 27.3. Si la sucesión $\{\, S_n \,\}$ de las sumas parciales de una sucesión $\{\, s_n \,\}$ es convergente, entonces la serie $\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{\infty} s_i$ se llama convergente, y si la sucesión $\{\, S_n \,\}$ no tiene límite, entonces la serie $\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{\infty} s_i$ se llama divergente.

Definición 28.3. Si el límite $\lim_{(\mathbb{N}, \leq)} S_n = S$ de la sucesión $\{\, S_n \,\}$ de las sumas parciales de la sucesión una sucesión $\{\, s_n \,\}$ existe, entonces el límite se llama suma de la serie $\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{\infty} s_i$.

Precisamente en este sentido es como vamos a entender la notación

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} s_i \,.$$

Teorema 18.3 (Criterio de Cauchy de convergencia). La serie $s_1 + \cdots + s_n + \cdots$ converge si, y sólo si $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N} \mid$ para $n \geq k > N$, se tiene $|s_k + \cdots + s_n| < \varepsilon$.

Demostración. Como la convergencia de la serie $\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{\infty} s_i$ es equivalente a la convergencia de la sucesión $\{\, S_n \,\}$ de las sumas parciales de su sucesión $\{\, s_n \,\}$, entonces inmediatamente se deduce la demostración aplicando el criterio de Cauchy a la sucesión $\{\, S_n \,\}$. ■

Corolario 18.3.1. Si en la serie $S = s_1 + \cdots + s_n + \cdots$ se modifica sólo una cantidad finita de términos, entonces, la segunda serie converge si, y sólo si converge también la primera.

Demostración. Es suficiente aplicar el criterio de Cauchy considerando como N un número mayor al que corresponde la máxima cantidad de elementos modificados en la serie. ■

Corolario 18.3.2. Si la serie $S = s_1 + \cdots + s_n + \cdots$ converge, entonces la sucesión $\{\, s_n \,\}$ de sus términos tiene límite 0 cuando $n \to +\infty$, es decir,

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \text{ converge } \Longrightarrow \lim_{(\mathbb{N}, \leq)} \{\, s_n \,\} = 0.$$

Demostración. Es suficiente, en el criterio de Cauchy, hacer $m = n$, ó bien, de la siguiente manera: Como $s_n = S_n - S_{n-1}$, entonces $\lim_{(\mathbb{N}, \leq)} s_n = \lim_{(\mathbb{N}, \leq)} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{(\mathbb{N}, \leq)} S_n - \lim_{(\mathbb{N}, \leq)} S_{n-1} = S - S = 0$. ■

Ejemplo. La serie $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$, es llamada progresión geométrica infinita. Como $|q^n| = |q|^n$, entonces, si $|q| \geq 1$, se tiene $|q^n| \geq 1$ y entonces la condición necesaria para la convergencia de la serie $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$ no se satisface.

Veamos ahora cuando $|q| < 1$. Se tiene $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ y, entonces $S = 1 + q + q^2 + \cdots = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \dfrac{1}{1 - q}$, ya que $\lim_{(\mathbb{N}, \leq)} q^{n+1} = 0$, cuando $|q| < 1$.

Entonces serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ converge si, y sólo si $|q| < 1$ y en este caso $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1 - q}$.

Ejemplo. La serie $\boldsymbol{S} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\boldsymbol{n}} + \cdots$, llamada serie armónica, es divergente.

La condición necesaria para la convergencia de la serie $\boldsymbol{S}$ se satisfacen, pero esta condición, como se verá no es suficiente. Veamos la sucesión $\{ \boldsymbol{S_n} \}$, en donde

$$\boldsymbol{S_n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\boldsymbol{n}}.$$

Como $|\boldsymbol{S}_{2n} - \boldsymbol{S}_n| = \frac{1}{\boldsymbol{n}+1} + \frac{1}{\boldsymbol{n}+2} + \frac{1}{\boldsymbol{n}+3} + \cdots + \frac{1}{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}} > \boldsymbol{n}\,\frac{1}{2\boldsymbol{n}} = \frac{1}{2}$, entonces, por el criterio de Cauchy, se tiene que esta sucesión no tiene límite.

Ejemplo. La serie $\boldsymbol{S} = 1 - 1 + \cdots + (-1)\boldsymbol{n} + \cdots$, es divergente, lo que se deduce de que la sucesión 1, 0 , 1, 0, … de las sumas parciales, y de los términos de la suma no cumple la condición necesaria.

Definición 29.3. Se dice que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{s_k}$ converge absolutamente, si converge la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |\boldsymbol{s_k}|$.

Como $|\boldsymbol{s}_1 + \cdots + \boldsymbol{s_n}| \le |\boldsymbol{s}_1| + \cdots + |\boldsymbol{s_n}|$, entonces, por el criterio de Cauchy se deduce que si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |\boldsymbol{s_k}|$ converge, entonces converge también la serie $\boldsymbol{S} = \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{s_k}$.

Ejemplo. En la serie $\boldsymbol{S} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\boldsymbol{n}} - \frac{1}{\boldsymbol{n}} + \cdots$, las sumas parciales son $\frac{1}{\boldsymbol{n}}$ ó 0 y además la serie converge a 0.

La serie de los valores absolutos de sus términos $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\boldsymbol{n}} + \frac{1}{\boldsymbol{n}} + \cdots$ diverge, lo que se sigue del criterio de Cauchy al igual que la serie armónica:

$$\left| \frac{1}{\boldsymbol{n}+1} + \frac{1}{\boldsymbol{n}+1} + \cdots + \frac{1}{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}} + \frac{1}{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}} \right| = 2 \left| \frac{1}{\boldsymbol{n}+1} + \cdots + \frac{1}{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}} \right| > 2\,\boldsymbol{n}\,\frac{1}{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}} = 1.$$

Teorema 19.3. La serie $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}_1 + \cdots + \boldsymbol{s_n}$, cuyos términos son no negativos converge si, y sólo si la sucesión de sus sumas parciales es acotada superiormente.

Demostración. Se sigue de la definición de la convergencia de la serie y el criterio de convergencia de una sucesión no decreciente, aplicados a la sucesión $\{ \boldsymbol{S}_n \}$. ■

Teorema 20.3. Supongamos que $\boldsymbol{A} = \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{a_k}$ y $\boldsymbol{B} = \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{b_k}$ son dos series con términos no negativos y que $\exists\, \boldsymbol{N} \in \mathbb{N} \mid \forall\, \boldsymbol{n} > \boldsymbol{N},\ \boldsymbol{a_n} \le \boldsymbol{b_n}$. Entonces se tiene que

a) $\boldsymbol{B}$ es convergente $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ es convergente

b) $\boldsymbol{A}$ es divergente $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{B}$ es divergente.

Demostración. Una cantidad finita de términos no influye en la convergencia de una serie, por lo que se puede considerar, sin perder generalidad, que $\boldsymbol{a_n} \le \boldsymbol{b_n}\ \forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.

Si $A_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $B_n := \sum_{k=1}^{\infty} b_k$, entonces $A_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k = B_n$.

a) Si B es convergente, entonces la sucesión $\{ B_n \}$ no decreciente tiene un límite B y, por lo tanto $A_n \leq B_n \leq B$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$, es decir, la sucesión $\{ A_n \}$ es acotada por lo que la serie B.

b) Si A es divergente, por reducción al absurdo, supongamos que B es convergente. Entonces aplicando el caso anterior, se tiene que A es convergente, lo que contradice la hipótesis. ■

Ejemplo. Las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ convergen ó divergen juntas, puesto que $\dfrac{1}{n(n+1)} < \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{(n-1)n}$, y como $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)} = 1 - \frac{1}{(n+1)}$, se tiene entonces que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ y, por lo tanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ también es convergente.

Corolario (Criterio de Weierstrass). Supongamos que $A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ son dos series para las cuales $\exists\ N \in \mathbb{N} \mid \forall\ n > N$, $|a_n| \leq b_n$. Entonces, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge $\Longrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

Demostración. Se deduce del teorema anterior ya que:

$$B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty \Longrightarrow A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty. \ ■$$

Ejemplos. La serie $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ es absolutamente convergente, puesto que $\left|\dfrac{\sin n}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$ y, como se vio en el ejemplo anterior, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente.

Corolario (Criterio de Cauchy). Sea $S = \sum_{k=1}^{\infty} s_k$ una serie y supongamos que $\alpha := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|s_n|}$.

Entonces a) $\alpha < 1$ $\Longrightarrow$ S converge absolutamente;

b) $\alpha > 1$ $\Longrightarrow$ S diverge;

c) $\alpha = 1$ $\Longrightarrow$ existen tanto series S convergentes como divergentes.

Demostración. a) Si $\alpha < 1$, entonces se puede elegir $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha < \boldsymbol{q} < 1$. Por la definición de límite superior $\exists\, \boldsymbol{N} \in \mathbb{N} \mid \forall\, \boldsymbol{n} > \boldsymbol{N},\ \sqrt[n]{|s_n|} \le \boldsymbol{q}$. De esta forma, cuando $\boldsymbol{n} > \boldsymbol{N}$, se tiene $|s_n| \le q^n$ y, como $\sum_{k=1}^{\infty} q^k < \infty$ cuando $|q| < 1$, entonces, por el criterio de Weierstrass, $S = \sum_{k=1}^{\infty} |s_k| < \infty$.

b) Como α es un límite parcial de la sucesión $\{\, s_n \,\}$, entonces existe una subsucesión $\{\, s_{n_k} \,\}$ tal que $\sqrt[n_k]{|s_{n_k}|} = \alpha$. Si $\alpha > 1$, entonces $\exists\, \boldsymbol{K} \in \mathbb{N} \mid \forall\, \boldsymbol{k} > \boldsymbol{K},\ |s_{n_k}| > 1$, por lo que la condición necesaria para la convergencia de la serie $\boldsymbol{S}$ no se satisface, por lo que $\boldsymbol{S}$ es divergente.

c) $\alpha = 1$, entonces existen series $\sum_{k=1}^{\infty} s_k$ tanto convergentes, como divergentes.

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es absolutamente convergente, puesto que $\left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$. Sin embargo,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1.$$

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente. Sin embargo,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) = 1. \blacksquare$$

Corolario (Criterio de D'Lambert). Sea $\boldsymbol{S} = \sum_{k=1}^{\infty} s_k$ una serie y supongamos que $\alpha = \lim_{(\mathbb{N}, \le)} \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right|$. Entonces se tiene que

a) $\alpha < 1 \implies$ $\boldsymbol{S}$ converge absolutamente;

b) $\alpha > 1 \implies$ $\boldsymbol{S}$ diverge;

c) $\alpha = 1 \implies$ existen tanto series $\boldsymbol{S}$ convergentes, como divergentes.

Demostración.

a) Si $\alpha < 1$, entonces se puede elegir $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha < \boldsymbol{q} < 1$. Por las propiedades de los límites $\exists\, \boldsymbol{N} \in \mathbb{N} \mid \forall\, \boldsymbol{n} > \boldsymbol{N},\ \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| \le \boldsymbol{q}$. Como una cantidad finita de términos no influye en la convergencia de la serie, se puede considerar, sin perder generalidad, que $\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| \le \boldsymbol{q}\ \ \forall\, \boldsymbol{n} > \boldsymbol{N}$. Como

$$\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| \left|\frac{s_n}{s_{n-1}}\right| \cdots \left|\frac{s_2}{s_1}\right| = \left|\frac{s_{n+1}}{s_1}\right|$$

se obtiene $|s_{n+1}| = |s_1|\ q^n$. Pero la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |s_1|\ q^k$ es convergente, por lo que, por el criterio de Weierstrass, la serie S es absolutamente convergente.

b) Si $\alpha > 1$, entonces $\exists\ N \in \mathbb{N} \mid \forall\ n > N,\ \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| > 1$, es decir $|s_n| < |s_{n+1}|$, por lo que la condición necesaria para la convergencia de la serie S no se satisface, por lo que S es divergente.

c) $\alpha = 1$, entonces existen series $\sum_{k=1}^{\infty} s_k$ tanto convergentes, como divergentes.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es absolutamente convergente, puesto que $\left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$. Sin embargo,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^2 = 1.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente. Sin embargo,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1.\ \blacksquare$$

Corolario (Cauchy). Sea $S = \sum_{k=1}^{\infty} s_k$ una serie cuyos términos forman una sucesión monótona $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq 0$. Entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} s_k$ converge si, y solo si converge la serie $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k s_{2^k}$.

Demostración. Puesto que

$$\begin{aligned}
s_2 &\leq s_2 \leq s_1,\\
2s_4 &\leq a_3 + s_4 \leq 2s_2,\\
4s_8 &\leq s_5 + s_6 + s_7 + s_8 \leq 4s_4,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
2^n s_{2^{n+1}} &\leq s_{2^{n+1}} + \cdots + s_{2^{n+1}} \leq 2^n s_{2^n},
\end{aligned}$$

Sumando estas desigualdades, se tiene

$$\frac{1}{2}(\ S'_n - s_1\ ) \leq\ S_{2^{n+1}} - s_1 \leq S'_n,$$

donde $$S_k = s_1 + s_2 + \cdots + s_k\ ,\ \text{ y }\ S'_n = s_1 + 2s_2 + \cdots + 2^n s_{2^n}$$

son las sumas parciales de las series en estudio. Las sucesiones $\{\ S_k\ \}$ y $\{\ S'_n\ \}$ son no decrecientes y de las desigualdades se puede deducir que son al mismo tiempo acotadas o no acotadas superiormente. Por lo tanto, por el criterio de convergencia de las con términos no negativos se puede concluir que las dos serie convergen juntas ó juntas divergen. ■

Corolario. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

Demostración. Si $p \geq 0$, entonces, por lo ya demostrado esta serie converge o diverge junto con la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-p})^k$$

Esta última serie converge si, y sólo si $q = 2^{1-p} < 1$, es decir $p > 1$.

Si $p \leq 0$, entonces es evidente que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge, puesto que en este caso todo sus términos son mayores que 1. ■

§ 11.3 EL NÚMERO *e* COMO LA SUMA DE UNA SERIE.

Veamos ahora por la fórmula del binomio se tiene $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$, en donde

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot n}{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot (n-k)\cdot 1\cdot 2\cdot \cdots \cdot k} = \frac{n(n-1)\cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k!},$$

por lo que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot \cdots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)\frac{1}{k!},$$

o sea,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \cdots + n\frac{1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \cdots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot \cdots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!} + \cdots + \frac{1}{n^n},$$

en donde

$$\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot \cdots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)\frac{1}{k!} < \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot \cdots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right) < 1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1.$$

De esta forma se tiene que para $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\left(1+\frac{1}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}} < 1 + \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{\boldsymbol{n}!} =: \boldsymbol{e_n}$$

Por otra parte, para cualquier $\boldsymbol{k} \le \boldsymbol{n}$, se tiene

$$1+1+\left(1-\frac{1}{\boldsymbol{n}}\right)\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{\boldsymbol{n}}\right)\left(1-\frac{2}{\boldsymbol{n}}\right)\frac{1}{3!}+\cdots+\left(1-\frac{1}{\boldsymbol{n}}\right)\left(1-\frac{2}{\boldsymbol{n}}\right)\cdot\,\cdots\,\cdot\left(1-\frac{\boldsymbol{k}-1}{\boldsymbol{n}}\right)\frac{1}{\boldsymbol{k}!} < \left(1+\frac{1}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}}$$

Cuando $\boldsymbol{n} \to \infty$ la parte izquierda de esta desigualdad tiende a $\boldsymbol{e_k} = 1 + \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ \cdots + \frac{1}{\boldsymbol{k}!}$, y la parte derecha tiende a $\boldsymbol{e}$. Por lo tanto $\boldsymbol{e}_k = 1 + \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{\boldsymbol{k}!} \le \boldsymbol{e}\ \ \forall\ \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$.

Pero de la desigualdad $\left(1+\frac{1}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}} < \boldsymbol{e_n} = 1 + \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{\boldsymbol{n}!} \le \boldsymbol{e}$, se deduce que cuando $\boldsymbol{n} \to \infty$, se tiene que $\lim\limits_{(\mathbb{N},\le)} \boldsymbol{e_n} = 1 + \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{\boldsymbol{n}!} = \boldsymbol{e}$.

De acuerdo a la definición de la suma de la serie, se puede escribir entonces

$$\boldsymbol{e} = 1 + \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{\boldsymbol{n}!} + \cdots$$

Veamos de otra forma que $\boldsymbol{e_n} = 1 + \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{\boldsymbol{n}!} < \boldsymbol{e_{n+1}} = \boldsymbol{e_n} + \frac{1}{(\boldsymbol{n}+1)!}$.

Además $\boldsymbol{e_n} := 1 + \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{\boldsymbol{n}!} < 1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{\boldsymbol{n}}} = 3 - \frac{1}{2^{\boldsymbol{n}+1}} < 3$, es decir, la sucesión $\{\ \boldsymbol{e_n}\ \}$ es creciente y acotada superiormente y por lo tanto el conjunto no vacío $\{\ \boldsymbol{e_n}\ \}$ tiene un extremo superior $\boldsymbol{e} := \sup\ \{\ \boldsymbol{e_n}\ \} = \lim\limits_{\boldsymbol{n}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}}$.

La serie $\boldsymbol{e} = 1 + \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{\boldsymbol{n}!} + \cdots$ es muy útil para el cálculo del número $\boldsymbol{e}$.

Calculemos la diferencia $\boldsymbol{e} - \boldsymbol{e_n}$:

$$0 < \boldsymbol{e} - \boldsymbol{e_n} = \frac{1}{(\boldsymbol{n}+1)!} + \frac{1}{(\boldsymbol{n}+2)!} + \frac{1}{(\boldsymbol{n}+3)!} + \cdots = \frac{1}{(\boldsymbol{n}+1)!}\left[1 + \frac{1}{\boldsymbol{n}+2} + \frac{1}{(\boldsymbol{n}+2)(\boldsymbol{n}+3)} + \cdots\right] <$$

$$< \frac{1}{(\boldsymbol{n}+1)!}\left[1+\frac{1}{\boldsymbol{n}+2}+\frac{1}{(\boldsymbol{n}+2)^2}+\cdots\right] = \frac{1}{(\boldsymbol{n}+1)!}\ \frac{1}{1-\frac{1}{(\boldsymbol{n}+2)}}\ \frac{\boldsymbol{n}+2}{\boldsymbol{n}!\ (\boldsymbol{n}+1)^2} < \frac{1}{\boldsymbol{n}!\ \boldsymbol{n}}.$$

Así, para que la discrepancia absoluta de aproximación del número $\boldsymbol{e}$ mediante la serie finita $\boldsymbol{e_n}$, no sea mayor que, por ejemplo 10^{-3}, es suficiente que $\frac{1}{\boldsymbol{n}!\ \boldsymbol{n}} < 10^{-3}$. Esta condición la satisface $\boldsymbol{e}_6$.

El valor aproximado de $\boldsymbol{e}$, es:

$$\boldsymbol{e} = 2.71828182845904523536028747135266249775724709366995\ldots$$

Demostremos ahora que para cualquier $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \boldsymbol{e}.$$

Sea $f\colon \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{N}$ un mapeo, definido por la igualdad

$$f(x) \coloneqq [x] \coloneqq \boldsymbol{max}\ \{\, z \in \mathbb{Z} \mid z \le x \,\}$$

Además, sea $\mathscr{B}_X$ la base $x \to +\infty$ (de vecindades de $+\infty$) y $\mathscr{B}_Y$ la base $n \to +\infty$ ($n \in \mathbb{N}$).

Entonces, $\forall\ \mathbf{E}_Y = \{\, n \in \mathbb{N} \mid n > N \,\} \in \mathscr{B}_Y\ \exists\ \mathbf{E}_X = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x > N + 1 \,\} \in \mathscr{B}_X$ tal que $f(\mathbf{E}_X) \subseteq \mathbf{E}_Y$.

Se ha visto anteriormente que

$$\lim_{(\mathbb{N},\le)} g_1(n) = \lim_{(\mathbb{N},\le)}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{(\mathbb{N},\le)} g_2(n) = \lim_{(\mathbb{N},\le)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{(\mathbb{N},\le)} g_3(n) = \lim_{(\mathbb{N},\le)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \boldsymbol{e}.$$

Por el teorema del límite de la composición de mapeos, se tiene

$$(g_1\circ f)(x) = \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \le (g_2\circ f)(x) = \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \le (g_3\circ f)(x) = \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

cada una de las cuales tiene como límite cuando $x \to +\infty$ el número $\boldsymbol{e}$.

Ahora, observemos que, si $x > 0$, entonces

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

y como el primer y el tercer miembros de las desigualdades tienden a e cuando , por el teorema se deduce que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \boldsymbol{e}$.

Falta demostrar que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \boldsymbol{e}$. Haciendo $x \eqqcolon -1 - t$,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-1-t}\right)^{-1-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+t}\right)^{-1-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{1+t} =$$
$$\lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\left(1+\frac{1}{t}\right)\right] = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\ \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right) = \boldsymbol{e}\cdot 1 = \boldsymbol{e}.$$

Demostremos por último que $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \boldsymbol{e}$. Sea $\varepsilon > 0$.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$, entonces $\exists\, r_1 \in \mathbb{R}^+ \mid$ para $x > r_1$ se tiene $\left|\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} - e\right| < \varepsilon$.

y como $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$, entonces $\exists\, r_2 \in \mathbb{R}^+ \mid$ para $x < -r_2$ se tiene $\left|\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} - e\right| < \varepsilon$.

Entonces, cuando $x > r \coloneqq \max\{\, r_1, r_2 \,\}$, se tiene $\left|\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} - e\right| < \varepsilon$, es decir,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e. \blacksquare$$

§ 12.3 **Mapeos Logarítmicos y Exponenciales**

Definición 30.3. El mapeo exponencial $\exp_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, con base $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$; se pueden definir mediante la igualdad:

$$\exp_a(x) \coloneqq a^x.$$

En especial, si $a = e$, se escribe $\exp(x)$ en lugar de $\exp_e(x)$ y se llama simplemente mapeo exponencial (sin mencionar la base).

En el programa escolar se definen las potencias como

$a^1 \coloneqq a$ y $a^{n+1} \coloneqq a^n \cdot a$.

Además, $a^0 \coloneqq 1$ y $a^{-n} \coloneqq \dfrac{1}{a^n}$ de donde se siguen

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\quad a^m \cdot a^n = a^{m+n},\quad a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m \quad \text{y} \quad a^{-\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^{-1}.$$

Propiedades:

3) $a^1 = a$;
4) $a^{x_1}\, a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$;
5) $a^{x_1} < a^{x_2} \iff (x_1 < x_2)$, si $a > 1$;
6) $a^{x_1} > a^{x_2} \iff (x_1 < x_2)$, si $0 < a < 1$;
7) El conjunto de valores de $\exp_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ es el conjunto $\mathbb{R}^+$ de los números reales positivos.

Las propiedades 3) y 4) del mapeo exponencial $\exp_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, con base $a \in \mathbb{R}^+-\{1\}$, muestran que dicho mapeo es biyectivo, y por lo tanto, que tiene un mapeo inverso.

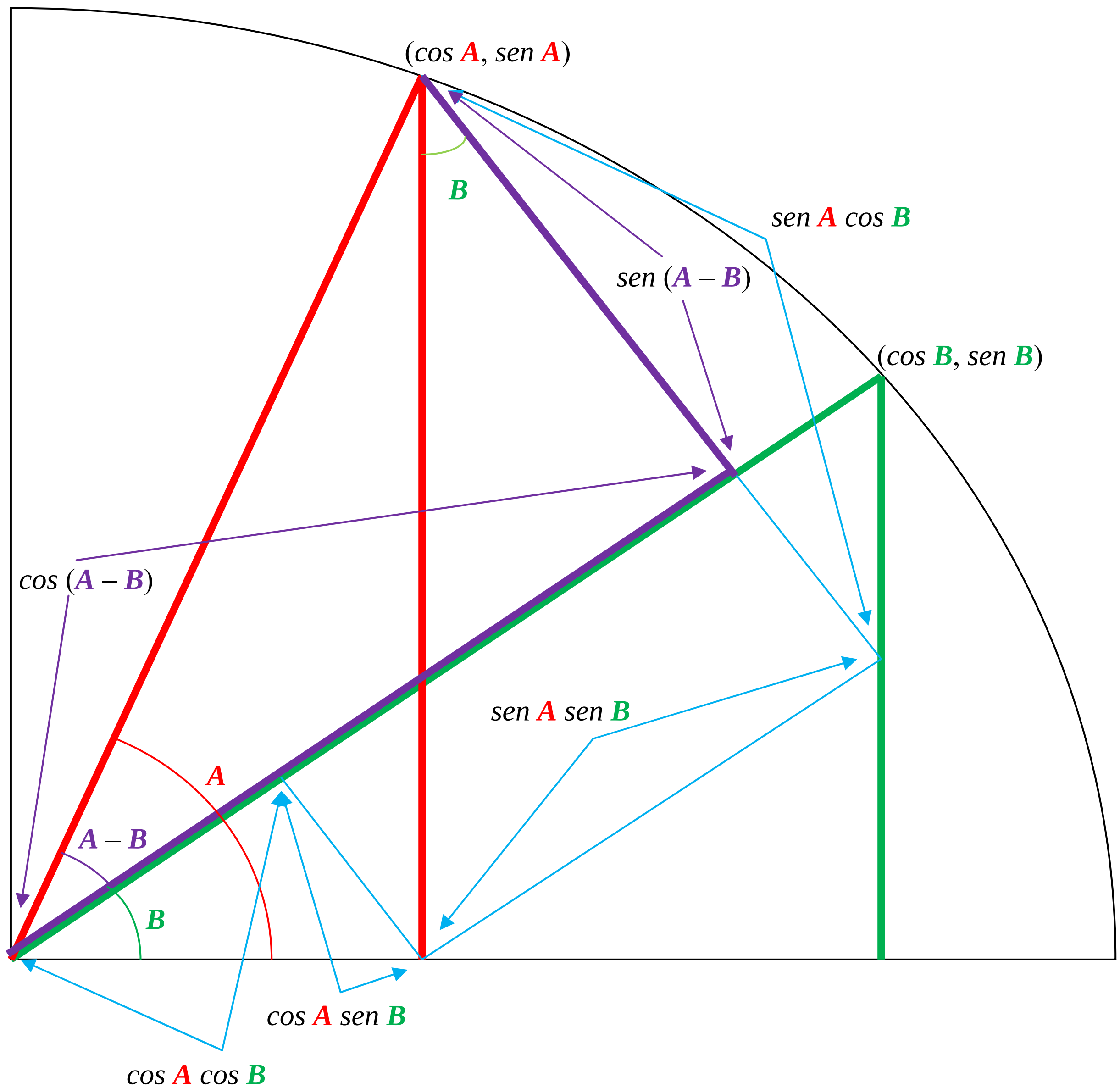
Definición 31.3. El mapeo logarítmico $\log_a\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, con base $a \in \mathbb{R}^+-\{1\}$; se pueden definir como la inversa de la función exponencial. En especial, si $a = e$, se escribe ln en lugar de $\log_e$ y se llama logaritmo natural. Se tiene entonces: $y = \log_a(x) \iff x = \exp_a(y) = a^y$.

Propiedades:

1) $\log_a(a) = 1$;
2) $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2)$;
3) $\log_a(x_1) < \log_a(x_2) \iff (x_1 < x_2)$, si $a > 1$;
4) $\log_a(x_1) > \log_a(x_2) \iff (x_1 < x_2)$, si $0 < a < 1$.
5) El conjunto de valores de $\log_a\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Se tiene entonces: $\quad \forall x \in \mathbb{R}\ \ \log_a(a^x) = x;\ \ \forall y \in \mathbb{R}^+\ \ a^{\log_a(y)} = y$.

§ 13.3 Mapeos Trigonométricos con el Círculo Trigonométrico



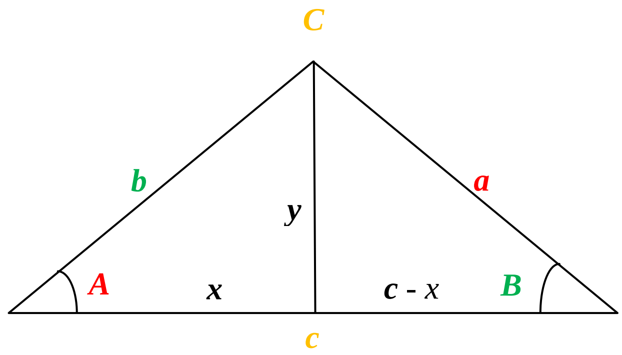
En una círcunferencia $x^2 + y^2 = 1$ de radio $r = 1$, para cualquier ángulo A, se definen los mapeos seno y coseno de la siguiente manera: $\cos A = x$ y $\operatorname{sen} A = y$.

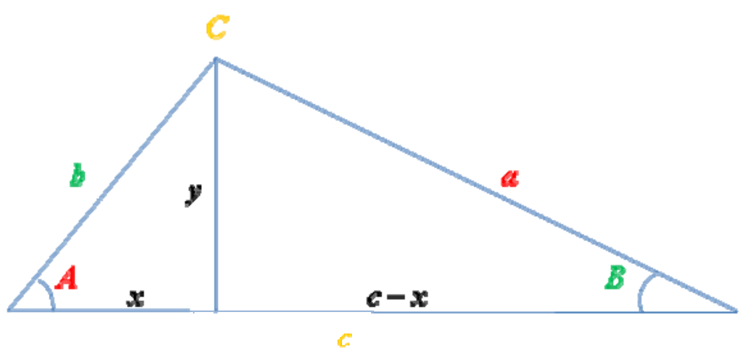
Se sigue de la definición, que sen 0 = 0, cos 0 = 1, $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\operatorname{sen} \pi = 0$, $\cos \pi = -1$, $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1$, $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$.

En una circunferencia $x + y = 1$ de radio $r = 1$, se obtienen los mapeos seno y coseno de la diferencia de dos ángulos, de la siguiente manera:

$\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen} A \cos B - \cos A \operatorname{sen} B$
$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$

Se sigue inmediatamente que *sen* (– ***B***) = – *sen* ***B*** y *cos* (– ***B***) = *cos* ***B***.





§ 14.3 MAPEOS TRIGONOMÉTRICOS COMO SERIES DE POTENCIAS.

Adición y Multiplicación de Series. La adición y la multiplicación de dos series $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ se pueden realizar correspondientemente, de la siguiente manera:

$$A + B \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \qquad \text{y} \qquad A\,B \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (a_{n-k} b_k)$$

es decir, $A + B \coloneqq (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \cdots + (a_n + b_n) + \cdots$; y

$$A\,B \coloneqq (a_0\,b_0) + (a_1\,b_0 + a_0\,b_1) + \cdots + (a_n\,b_0 + a_{n-1}\,b_1 + \cdots + a_1\,b_{n-1} + a_0\,b_n) + \cdots .$$

Teorema 21.3. El producto de dos series absolutamente convergentes es una serie absolutamente convergente y su suma es igual al producto de las sumas de las series multiplicadas.

Demostración. Para obtener el producto de las series $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ obsérvese que en cada suma finita $\sum_{k=0}^{n} (a_{n-k} b_k)$ de términos de la forma $a_{n-k} b_k$ se toma un número $n \in \mathbb{N}$ tal que el producto de las sumas $A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ y $B_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$ contiene todos los elementos de la suma inicial, por lo que

$$\left| \sum_{k=0}^{n} (a_{n-k} b_k) \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_{n-k} b_k| = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \sum_{k=0}^{n} |b_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$$ de donde se deduce la convergencia absoluta de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} b_k)$ y cuya suma queda unívocamente definida, independientemente del orden de los sumandos, por lo que se puede obtener como el límite del producto de las sumas $A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ y $B_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$ cuando $n \to \infty$, ya que, $A_n\,B_n \to A\,B$ cuando $n \to \infty$.

Se tiene entonces $A\,B \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (a_{n-k} b_k)$, es decir,

$$A\,B \coloneqq (a_0\,b_0) + (a_1\,b_0 + a_0\,b_1) + \cdots + (a_n\,b_0 + a_{n-1}\,b_1 + \cdots + a_1\,b_{n-1} + a_0\,b_n) + \cdots . \blacksquare$$

Definición 32.3. Una serie es alternada si cualesquiera dos términos consecutivos son de signo contrario, es decir, $A = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$, en donde $a_n > 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Teorema 22.3. Si en una serie alternada $A = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ sus términos son decrecientes en valor absoluto, es decir $a_n = |(-1)^n a_n| > |(-1)^{n+1} a_{n+1}| = a_{n+1}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $\{A_n\}$ de las sumas parciales $A_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$ tiene los términos ordenados de la siguiente manera:

$$A_1 \le A_3 \le \cdots \le A_{2n+1} \le \cdots \le A \le \cdots \le A_{2n} \le \cdots \le A_2 \le A_0$$

Demostración. Puesto que $a_n > a_{n+1}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, se tiene,

$A_{2n+2} - A_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k = a_0 - a_1 + \cdots + a_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} - (a_0 - a_1 + \cdots + a_{2n})$, esto es, $A_{2n+2} - A_{2n} = -a_{2n+1} + a_{2n+2} < 0$.

$A_{2n+1} - A_{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k a_k = a_0 - a_1 + \cdots - a_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1} - (a_0 - a_1 + \cdots - a_{2n-1})$, esto es, $A_{2n+1} - A_{2n-1} = a_{2n} - a_{2n+1} > 0$. ■

Definición 32.3. Los mapeos trigonométricos sen: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, llamado seno y cos: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, llamado coseno; se pueden definir mediante las siguientes series:

$$\operatorname{sen}(x) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad \text{y}$$

$$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad .$$

De la definición se sigue inmediatamente que para $x = 0$ ambas series convergen y que $\operatorname{sen}(0) = 0$ y $\cos(0) = 1$.

Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, se tienen dos series numéricas, en donde

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\dfrac{a^{2n-1}}{(2n-1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^2}{2n\,(2n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{a^2}{2n\,(2n+1)} = 0 < 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{a^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\dfrac{a^{2n}}{(2n)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^2}{(2n+1)\,(2n+2)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{a^2}{(2n+1)\,(2n+2)} = 0 < 1$$

Por el criterio de D'Lambert estas series convergen absolutamente para cualquier valor $x \in \mathbb{R}$, por lo que los mapeos quedan bien definidos.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Para sen(x) y cos(y), por la fórmula del producto de series, resulta:

$$\operatorname{sen}(x)\cos(y) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x^{2(n-k)+1}}{(2(n-k)+1)!}\,\frac{y^{2k}}{(2k)!}\right), \text{ es decir,}$$

$$\operatorname{sen}(x)\cos(y) = x\,1 - \left(\frac{x^3}{3!}\,1 + x\,\frac{y^2}{2!}\right) + \left(\frac{x^5}{5!}\,1 + \frac{x^3}{3!}\,\frac{y^2}{2!} + x\,\frac{y^4}{4!}\right) - \left(\frac{x^7}{7!}\,1 + \frac{x^5}{5!}\,\frac{y^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\,\frac{y^4}{4!} + x\,\frac{y^6}{6!}\right) + \cdots$$

y, análogamente para sen(y) y cos(x), tenemos

$$\cos(x)\operatorname{sen}(y) = 1\,y - \left(\frac{x^2}{2!}\,y + 1\,\frac{y^3}{3!}\right) + \left(\frac{x^4}{4!}\,y + \frac{x^2}{2!}\,\frac{y^3}{3!} + 1\,\frac{y^5}{5!}\right) - \left(\frac{x^6}{6!}\,y + \frac{x^4}{4!}\,\frac{y^3}{3!} + \frac{x^2}{2!}\,\frac{y^5}{5!} + 1\,\frac{y^7}{7!}\right) + \cdots$$

Al efectuar la suma y resta respectiva de estas dos últimas series, se obtiene

$$\operatorname{sen}(x)\cos(y) \pm \cos(x)\operatorname{sen}(y) = (x \pm y) - \frac{(x \pm y)^3}{3!} + \frac{(x \pm y)^5}{5!} - \frac{(x \pm y)^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\,\frac{(x \pm y)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

es decir, 1) $\operatorname{sen}(x + y) \equiv \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y)$.

y 2) $\operatorname{sen}(x - y) \equiv \operatorname{sen}(x)\cos(y) - \cos(x)\operatorname{sen}(y)$.

análogamente se obtiene 3) $\cos(x + y) \equiv \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$.

y 4) $\cos(x - y) \equiv \cos(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$.

La identidad 4) nos muestra que $\cos(0 - 0) = \cos(0) = \cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) \equiv 1$, que es la ecuación de una circunferencia de radio 1; o sea, que las series de seno y coseno, están acotadas por 1 para cualquier valor $x \in \mathbb{R}$, es decir, $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$ y $|\cos(x)| \leq 1\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Si $x = y$, entonces, de 1) 3) y 4) se obtienen respectivamente: 5) $\operatorname{sen}(2x) \equiv 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$;

6) $\cos(2x) \equiv \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$

(Identidad Pitagórica) 7) $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) \equiv 1$.

De 1), 3), 5), 6) y 7), haciendo $\operatorname{sen}(3x) \equiv \operatorname{sen}(2x + x)$ y $\cos(3x) \equiv \cos(2x + x)$, se obtienen:

8) $\operatorname{sen}(3x) \equiv 3\operatorname{sen}(x) - 4\operatorname{sen}^3(x)$.

9) $\cos(3x) \equiv 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.

Si sumamos 1) + 2) y 3) + 4); y luego restamos 1) – 2) y 3) – 4); obtenemos respectivamente

10) $\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y) \equiv 2\operatorname{sen}(x)\cos(y)$.

11) $\operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y) \equiv 2\cos(x)\operatorname{sen}(y)$.

12) $\cos(x + y) + \cos(x - y) \equiv 2\cos(x)\cos(y)$.

13) $\cos(x + y) - \cos(x - y) \equiv -2\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$.

Si hacemos $x + y =: x'$ y $x - y =: y'$, entonces, de 10), 11),12) y 13) se obtienen respectivamente

14) $\operatorname{sen}(x') + \operatorname{sen}(y') = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(x' + y')\cos\frac{1}{2}(x' - y')$.

15) $\operatorname{sen}(x') - \operatorname{sen}(y') = 2\cos\frac{1}{2}(x' + y')\operatorname{sen}\frac{1}{2}(x' - y')$.

16) $\cos(x') + \cos(y') = 2\cos\frac{1}{2}(x' + y')\cos\frac{1}{2}(x' - y')$.

17) $\cos(x') - \cos(y') = -2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(x' + y')\operatorname{sen}\frac{1}{2}(x' - y')$.

Además, de 6) y 7) se deduce:

18) $\operatorname{sen}^2(\frac{x}{2}) = \frac{1 - \cos(x)}{2}$

19) $\cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{1 + \cos(x)}{2}$

Definición 34.3. Se definen los siguientes mapeos tan: $A \to \mathbb{R}$, cot: $B \to \mathbb{R}$, sec: $A \to \mathbb{R}$ y csc: $B \to \mathbb{R}$, llamadas respectivamente tangente, cotangente, secante y cosecante; mediante las respectivas igualdades

$$\tan(x) \coloneqq \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \quad \cot(x) \coloneqq \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \quad \sec(x) \coloneqq \frac{1}{\cos(x)} \text{ y } \csc(x) \coloneqq \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}.$$

en donde $\forall\, k \in \mathbb{Z}$ $\quad A \coloneqq \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ $\quad$ y $\quad B \coloneqq \mathbb{R} - \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

De estas definiciones se pueden obtener también identidades para estos nuevos mapeos.

PROPIEDADES DE LOS MAPEOS TRIGONOMÉTRICOS

Teorema 22.3. Para cualquier $x \in \mathbb{R}$ se cumple la desigualdad:

$$|\text{sen}(x)| \leq |x|$$

Demostración. Como los mapeos seno y coseno, por la identidad 7) están acotados por la unidad, entonces para $|x| \geq 1$ y para $|x| = 0$ se cumple la desigualdad $|\text{sen}(x)| \leq |x|$. Ahora bien, para $0 < |x| < 1$, puesto que $|\text{sen}(-x)| = |-\text{sen}(x)| = |\text{sen}(x)|$ y $|x| = |-x|$; por lo que es suficiente demostrar la desigualdad para $0 < x < 1$.

Como $0 < x < 1$, por el teorema de la sucesión de las sumas parciales de una serie alternada $S_1 \leq S_3 \leq \cdots \leq S_{2n+1} \leq \cdots \leq \text{sen}(x) \leq \cdots \leq S_{2n} \leq \cdots \leq S_2 \leq S_0$, se tiene,
$x - \frac{x^3}{3!} < \text{sen}(x) < x$ si $x > 0$ y $x < \text{sen}(x) < x - \frac{x^3}{3!}$ si $x < 0$; por lo que
$|\text{sen}(x)| \leq |x|$ y $|x - \text{sen}(x)| \leq \left|\frac{x^3}{3!}\right|$.

Se puede ver también que, para $0 < x < 1$ y $\forall\ n \in \mathbb{N}$, se tiene $x^{2n-1} > x^{2n+1}$, y por lo que $\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} > \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$, de donde, utilizando la definición del mapeo seno, se obtiene la siguiente serie:

$$\text{sen}(x) = x - \left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}\right) - \left(\frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!}\right) - \cdots - \left(\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} - \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}\right) - \cdots,$$

en donde todos los términos, dentro de los paréntesis, son positivos, por lo que $\text{sen}(x) \leq x$. ■

Lema 2. Para cualquier $x \in\ ]\,0, 1\,[$ se cumple la desigualdad:

$$\text{sen}(x) > 0$$

Demostración. Como $x > 0$, por el teorema de la sucesión de las sumas parciales de la serie alternada, para $n = 1$, se tiene, $\text{sen}(x) > x - \frac{x^3}{3!} > 0$. Por lo tanto $\text{sen}(x) > 0$.

Se puede ver también que, para $0 < x < 1$ y $\forall\ n \in \mathbb{N}$,, se tiene $x^{6n-5} > x^{6n-3}$, y por lo que $\frac{x^{6n-5}}{(6n-5)!} > \frac{x^{6n-3}}{(6n-3)!}$, de donde, utilizando la definición del mapeo seno, se tiene

$$\text{sen}(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right) + \left(\frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}\right) + \cdots + \left(\frac{x^{6n-5}}{(6n-5)!} - \frac{x^{6n-3}}{(6n-3)!}\right) + \cdots,$$

en donde todos los términos son positivos, por lo que $\text{sen}(x) > 0$. ■

Corolario. $\forall\ x \in\ ]\,0, \frac{1}{2}\,[$ se cumple la desigualdad: $\cos(x) > 0$

Demostración. Se deduce directamente del lema y de la identidad 5):

$\text{sen}(2x) = 2\ \text{sen}(x)\cos(x) > 0$. ■

CAPÍTULO IV
CONTINUIDAD DE LOS MAPEOS

§ 1.4 DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD

Definición 1.4. Un mapeo f: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ es continuo en el punto $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$, si

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = o(1) \text{ cuando } \boldsymbol{A} \ni \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = o(1).$$

Recuérdese que $\boldsymbol{A} \ni \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = o(1)$ significa que $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = o(1)$, para $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$.

De la definición de continuidad se deduce que si $f(\boldsymbol{a})$ está definida, se tiene

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = o(1) \text{ cuando } \boldsymbol{A} \ni \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a} \iff \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = 0 \iff \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}).$$

La relación $\lim_{\boldsymbol{A}\ni\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$ se puede escribir también de la forma $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f\left(\lim_{\boldsymbol{A}\ni\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{x}\right)$

Definición 2.4. El mapeo f:$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \to \mathbb{R}$ es continuo en $\boldsymbol{a}$ por la derecha, si $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = o(1)$ cuando $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \ni \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = o(1)$, es decir, si $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = o(1)$ cuando $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \ni \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}^+$.

Definición 3.4. El mapeo f:$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \to \mathbb{R}$ es continuo en $\boldsymbol{b}$ por la izquierda, si $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{b}) = o(1)$ cuando $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \ni \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} = o(1)$, es decir, si $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{b}) = o(1)$ cuando $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \ni \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{b}^-$.

Definición 4.4. El mapeo f: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ es continuo en un conjunto $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{A}$, si es continuo en cada punto $\boldsymbol{a}$ del conjunto $\boldsymbol{S}$.

El mapeo f: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ es continuo en un segmento $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \subseteq \boldsymbol{A}$ si es continuo en cada punto del intervalo $]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[\subseteq [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ y además f es continuo en $\boldsymbol{a}$ por la derecha y f es continuo en $\boldsymbol{b}$ por la izquierda.

La familia de todos los mapeos f: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$ que son continuos en el conjunto $\boldsymbol{A}$ se denota como $\mathscr{C}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{B})$, es decir

$$\mathscr{C}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{B}) \coloneqq \{f\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R} \mid f \text{ es un mapeo continuo en } \boldsymbol{A}\}$$

Se puede escribir $\mathscr{C}(\boldsymbol{A})$ en lugar de $\mathscr{C}(\boldsymbol{A}; \mathbb{R})$.

Ejemplo. Cualquier mapeo constante k: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{k}$ $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ pertenece a la clase $\mathscr{C}(\mathbb{R})$, es decir, $k \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$. La afirmación es clara ya que $k(\mathbb{R}) = \boldsymbol{k} \in \mathbf{U}(\boldsymbol{k})$ para cualquier vecindad $\mathbf{U}(\boldsymbol{k})$.

Ejemplo. El mapeo identidad $1_{\boldsymbol{A}}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $1_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ pertenece a la clase $\mathscr{C}(\mathbb{R})$, es decir, $1_{\boldsymbol{A}} \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$.

Efectivamente, para cualquier punto $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$, se tiene $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = o(1)$.

Ejemplo. El mapeo sen: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pertenece a la clase $\mathscr{C}(\mathbb{R})$, es decir, sen$\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$. Efectivamente, para $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$, aplicando la identidad, se tiene

$$|\mathrm{sen}(x) - \mathrm{sen}(a)| = \left|2 \cos\tfrac{1}{2}(x + a) \,\mathrm{sen}\tfrac{1}{2}(x - a)\right| \leq 2 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{2} | x - a | = | x - a |$$

puesto que $\left|\cos\frac{1}{2}(x + a)\right| \leq 1$ y $\left|\mathrm{sen}\frac{1}{2}(x - a)\right| \leq \frac{1}{2} | x - a |$. Entonces,

$$\mathrm{sen}(x) - \mathrm{sen}(a) = \mathrm{o}(1) \text{ cuando } x - a = \mathrm{o}(1).$$

Ejemplo. el mapeo cos: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pertenece a la clase $\mathscr{C}(\mathbb{R})$, es decir, cos $\in \mathscr{C}(\mathbb{R})$. Efectivamente, para $a \in \mathbb{R}$, aplicando la identidad, se tiene

$$|\cos(x) - \cos(a)| = \left|- 2 \,\mathrm{sen}\tfrac{1}{2}(x + a) \,\mathrm{sen}\tfrac{1}{2}(x - a)\right| \leq 2 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{2} | x - a | = | x - a |$$

puesto que $\left|\mathrm{sen}\frac{1}{2}(x + a)\right| \leq 1$ y $\left|\mathrm{sen}\frac{1}{2}(x - a)\right| \leq \frac{1}{2} | x - a |$. Entonces,

$$\cos(x) - \cos(a) = \mathrm{o}(1) \text{ cuando } x - a = \mathrm{o}(1).$$

Ejemplo. El mapeo $\exp_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pertenece a la clase $\mathscr{C}(\mathbb{R})$, es decir, $\exp_a\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$. Efectivamente, para $x_0\in\mathbb{R}$, se tiene

$$\exp_a(x) - \exp_a(x_0) = a^x - a^{x_0} = a^{x_0} \left(a^{x - x_0} - 1\right)$$

por la equivalencia $\left(a^{x - x_0} - 1\right) \sim \log_a\left(a^{x - x_0} \right)$ cuando $x - x_0 = \mathrm{o}(1)$, se tiene

$$a^{x_0} \left(a^{x - x_0} - 1\right) \sim a^{x_0} \log_a\left(a^{x - x_0} \right) = a^{x_0} (x - x_0) \log_a(a) = a^{x_0} (x - x_0) = a^{x_0} \mathrm{o}(1) = \mathrm{o}(1).$$

Ejemplo. El mapeo $\log_a$: $\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ pertenece a la clase $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+)$, es decir, $\log_a\in\mathscr{C}(\mathbb{R}^+)$. Efectivamente, para $x_0\in\mathbb{R}^+$, se tiene

$$\log_a(x) - \log_a(x_0) = \log_a\left(\frac{x}{x_0}\right) = \log_a\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)$$

por la equivalencia $\log_a\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right) \sim \frac{x - x_0}{x_0}$ cuando $x - x_0 = \mathrm{o}(1)$, se tiene

$$\log_a\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right) \sim \frac{x - x_0}{x_0} = \frac{\mathrm{o}(1)}{x_0} = \mathrm{o}(1).$$

Ejemplo. Cualquier sucesión f: $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ pertenece a la clase $\mathscr{C}(\mathbb{N})$, es decir, $f\in\mathscr{C}(\mathbb{N})$. Efectivamente, se deduce de que cada punto del conjunto $\mathbb{N}$ es un punto aislado de $\mathbb{N}$.

Definición 5.4. Si un mapeo f: $A\to\mathbb{R}$ no es continuo en un punto $a\in A\subseteq\mathbb{R}$, entonces este punto se llama punto de discontinuidad del mapeo f.

§ 2.4 PROPIEDADES LOCALES DE LOS MAPEOS CONTINUOS

Propiedades locales de los Mapeos Continuos. Propiedades locales de los mapeos continuos se les llama a aquellas propiedades que definen el comportamiento de los mapeos en alguna vecindad de un punto del dominio de definición, por ejemplo, la continuidad de un mapeo en algún punto del dominio de definición es, evidentemente, una propiedad local de un mapeo.

Teorema 1.4 (Acotación). Sea $f\colon \boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ un mapeo continuo en un punto $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{A}$. Entonces f es acotada en alguna vecindad $\mathbf{E}_{A}(\boldsymbol{a})$ del punto $\boldsymbol{a}$.

Demostración. Como el mapeo f es continuo en el $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{A}$, entonces $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = o(1)$ cuando $\boldsymbol{A} \ni \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = o(1)$,

Por las propiedades de los límites (teorema), se tiene

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = o(1) \text{ cuando } \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = o(1) \Leftrightarrow f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + o(1) = O(1) \text{ cuando } \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = o(1),$$

con valores $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$, es decir, f es acotada en alguna vecindad $\mathbf{E}_{A}(\boldsymbol{a})$ del punto $\boldsymbol{a}$.

Teorema 2.4 (Conservación del signo). Sea $f\colon \boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ un mapeo continuo en un punto $\boldsymbol{a}$ del conjunto $\boldsymbol{A}$ y supongamos que $f(\boldsymbol{a}) \neq 0$. Entonces existe una vecindad $\mathbf{E}(\boldsymbol{a})$ del punto $\boldsymbol{a}$ en la que $f(\boldsymbol{x})$ tiene el mismo signo que $f(\boldsymbol{a})$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbf{E}(\boldsymbol{a})$.

Demostración. Supongamos que $f(\boldsymbol{a}) > 0$. De acuerdo a la equivalencia

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = o(1) \text{ cuando } \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}, \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \mathbf{E}(\boldsymbol{a}) \mid |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| < \varepsilon\ \ \forall\, \boldsymbol{x}\in\mathbf{E}(\boldsymbol{a}),$$

como f es continua en $\boldsymbol{a}$ se tiene que, para $\varepsilon = \frac{1}{2} f(\boldsymbol{a}) > 0\ \exists\, \mathbf{E}(\boldsymbol{a}) \mid |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| < \frac{1}{2} f(\boldsymbol{a})\ \ \forall\, \boldsymbol{x}$ de la vecindad $\mathbf{E}(\boldsymbol{a})$. Por las propiedades de valor absoluto se tiene

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| < \frac{1}{2} f(\boldsymbol{a}) \Longleftrightarrow f(\boldsymbol{a}) - \frac{1}{2} f(\boldsymbol{a}) < f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2} f(\boldsymbol{a}), \text{ o sea }, \frac{1}{2} f(\boldsymbol{a}) < f(\boldsymbol{x}) < \frac{3}{2} f(\boldsymbol{a}),$$

es decir, $0 < f(\boldsymbol{x})$ en todo punto $\boldsymbol{x}$ del entorno $\mathbf{E}(\boldsymbol{a})$ como se quería demostrar.

Análogamente, si $f(\boldsymbol{a}) < 0$, entonces se toma $\varepsilon = -f(\boldsymbol{a}) > 0$. ■

Propiedades Algebraicas de los Mapeos Continuos

Teorema 3.4. Sean $f, g\colon \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$ mapeos continuos en un punto $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{X}$. Entonces los mapeos

1) $(f \pm g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \pm g(\boldsymbol{x})$.
2) $(fg)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})\, g(\boldsymbol{x})$.
3) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(\boldsymbol{x}) = \dfrac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})}$ si $g(\boldsymbol{a}) \neq 0$.

Están definidos en algún entorno $\mathbf{E}(\boldsymbol{a})$ del punto $\boldsymbol{a}$ y son continuos en el punto $\boldsymbol{a}$.

Demostración. Por hipótesis $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = o(1)$, cuando $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = o(1)$.
$g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{a}) = o(1)$, cuando $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = o(1)$.

Aplicando también los teoremas de límites, se tiene

1) $(f \pm g)(x) - (f \pm g)(a) = o(1)$, cuando $x - a = o(1)$, lo que significa que el mapeo $f \pm g$ está definido en algún entorno $\mathbf{E}(a)$ del punto a y es continuo en el punto a.

2) $(fg)(x) - (fg)(a) = o(1)$, cuando $x - a = o(1)$, lo que significa que el mapeo fg está definido en algún entorno $\mathbf{E}(a)$ del punto a y es continuo en el punto a.

3) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a) = o(1)$, cuando $x - a = o(1)$, lo que significa que el mapeo $\left(\frac{f}{g}\right)$ está definido en algún entorno $\mathbf{E}(a)$ del punto a y es continuo en el punto a. ■

Teorema 4.4. Sea f: $A \to B$ un mapeo continuo en un punto $a \in A \subseteq \mathbb{R}$ y sea g: $B \to C \subseteq \mathbb{R}$ un mapeo continuo en el punto $b = f(a) \in B \subseteq \mathbb{R}$. Entonces la composición $g \circ f$: $A \to \mathbb{R}$ es un mapeo continuo en el punto $a \in A \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración. En realidad, este teorema es una consecuencia del teorema del límite da la composición de mapeos, en el cual

$$\lim_{\mathscr{B}_A} (g \circ f)(x) = \lim_{\mathscr{B}_A} g(f(x)) = \lim_{\mathscr{B}_B} g(y) = g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a),$$

lo que significa que el mapeo $g \circ f$ está definido en algún entorno $\mathbf{E}_A(a)$ del punto a y es continuo en el punto $a \in A$. Sin embargo, para aplicar el teorema del límite del mapeo compuesto hace falta verificar, que para cualquier vecindad $\mathbf{E}_B(b)$ de la base $\mathscr{B}_B(b)$ se encuentra un elemento $\mathbf{E}_A(a)$ de la base $\mathscr{B}_A(a)$ tal que $f(\mathbf{E}_A(a)) \subseteq \mathbf{E}_B(b)$.

Si $\mathbf{E}_B(b) = B \cap \mathbf{E}(b)$, entonces, por la continuidad del mapeo f: $A \to B$ en el punto $a \in A$, para todo entorno $\mathbf{E}(b) = \mathbf{E}(f(a))$, se encuentra un entorno $\mathbf{E}_A(a)$ del punto a en el conjunto A tal que $f(\mathbf{E}_A(a)) \subseteq \mathbf{E}(f(a))$. Puesto que f es un mapeo con dominio en A y valores en B, entonces $f(\mathbf{E}_A(a)) \subseteq B \cap \mathbf{E}(f(a)) = \mathbf{E}_B(b)$ con lo que se verifica la condición por la cual se puede aplicar el teorema del límite del mapeo compuesto. ■

Ejemplo. Cualquier polinomio algebraico $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ es un mapeo continuo en todo el conjunto $\mathbb{R}$.

En efecto, por inducción se puede comprobar que la suma y el producto de una cantidad finita de mapeos continuos en algún punto, es un mapeo continuo en dicho punto.

Se ha comprobado que cualquier mapeo constante k: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $k(x) = k$ $\forall x \in \mathbb{R}$ y el mapeo identidad 1_A: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $1_A(x) = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ pertenecen a la clase $\mathscr{C}(\mathbb{R})$. Entonces los mapeos $ax^m = x \cdot x \cdot \cdots \cdot x$, y por lo tanto, el polinomio $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ pertenecen también a la clase $\mathscr{C}(\mathbb{R})$.

Ejemplo. Cualquier mapeo racional $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios algebraicos, es un mapeo continuo en todo el conjunto $\mathbb{R} - \{ x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0 \}$.

Ejemplo. La composición de una cantidad finita de mapeos continuos es un mapeo continuo.

§ 3.4 PROPIEDADES GLOBALES DE LOS MAPEOS CONTINUOS

Teorema 5.4 (Bolzano - Cauchy). Sea f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ un mapeo continuo en segmento $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y en los puntos extremos del segmento toma valores de signos contrarios, entonces existe un punto c del intervalo $]a, b[$, en el que el mapeo f toma el valor 0, es decir

$$f \in \mathscr{C}([a, b]\,;\mathbb{R}) \text{ y } (f(a)\cdot f(b)) < 0 \Longrightarrow \exists\, c \in\,]a, b[\;\big|\; f(c) = 0.$$

Demostración. Sin perder generalidad, supongamos que $f(a) > 0$ y $f(b) > 0$.

Divídase el segmento $[a, b] =: I_0$ por la mitad. Si $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > 0$, denotemos $a_0 =: a_1$ y $\dfrac{a+b}{2} =: b_1$; si, por el contrario $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) < 0$, entonces denotemos $\dfrac{a+b}{2} =: a_1$ y $b_0 =: b_1$.

Divídase ahora el segmento $[a_1 , b_1] =: I_1$ por la mitad. Si $f\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}\right) > 0$, entonces denotemos $a_1 =: a_2$ y $\dfrac{a_1+b_1}{2} =: b_2$; si, por el contrario $f\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}\right) < 0$, entonces denotemos $\dfrac{a_1+b_1}{2} =: a_2$ y $b_1 =: b_2$, … y continuando así sucesivamente el proceso, se obtiene una sucesión de segmentos encajados

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots,$$

en los que $|I_n| = \dfrac{b-a}{2^n}$ tiende a 0 cuando $n \to \infty$ y por construcción se tiene además, que $f(a_n) > 0$ y $f(b_n) < 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Por el teorema de Cantor, existe un único punto $c \in I_n \;\; \forall$ entero $n \geq 0$. Hay que demostrar que $f(c) = 0$.

Supongamos que $f(c) > 0$. Entonces, puesto que f es continuo, por el teorema de conservación del signo $\exists\, \mathrm{E}_r(c) \;\big|\; f(x) > 0 \;\; \forall\, x \in \mathrm{E}_r(c)$.

$$\forall\, r > 0 \;\; \exists\, n \in \mathbb{N} \;\big|\; I_n \subset \mathrm{E}_r(c), \text{ por ejemplo } \; n > \log_2\left(\frac{b-a}{r}\right); \text{ de donde } \frac{b-a}{2^n} < r.$$

Entonces $f(x) > 0 \;\forall\, x \in I_n \subset \mathrm{E}_r(c)$ y, por lo tanto $f(b_k) > 0 \quad \forall\, k > n$, lo cual no es posible, puesto que $f(b_n) < 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Suponer que $f(c) < 0$, nos lleva a una contradicción análoga, por lo que $f(c) = 0$. ■

Se puede demostrar también suponiendo sin perder generalidad, que $f(a) > 0$ y $f(b) > 0$.

Sea $S := \{\, x \in [a, b] \;\big|\; f(x) > 0 \,\}$. S no es vacío, puesto que $f(a) > 0$, además, es acotado superiormente, puesto que $f(b) < 0$ y $b > x \;\; \forall\, x \in [a, b]$. Por el teorema del extremo superior existe un punto $c \in [a, b] \;\big|\; c := \sup S$.

Si $f(c) > 0$, entonces $\exists\, \mathrm{E}_r(c) \;\big|\; f(x) > 0 \;\forall\, x \in \mathrm{E}_r(c)$. Por lo tanto, $f(x) > 0 \;\forall\, x \in \mathrm{E}_r(c^+)$, lo que contradice que $c := \sup S$.

Suponer que $f(c) < 0$, nos lleva a una contradicción análoga, por lo que $f(c) = 0$. ■

Teorema 6.4 de Darboux (Valor intermedio). Sea f: $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \to \mathbb{R}$ un mapeo continuo en el segmento $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \subset \mathbb{R}$ y supongamos que $f(\boldsymbol{a})$ y $f(\boldsymbol{b})$ están bien definidos. Entonces, f toma todos los valores comprendidos entre $f(\boldsymbol{a})$ y $f(\boldsymbol{b})$ por lo menos una vez, en el intervalo $]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$, es decir

$$f \in \mathscr{C}([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]; \mathbb{R}) \text{ y } f(\boldsymbol{a}) \text{ y } f(\boldsymbol{b}) \text{ están bien definidos} \Longrightarrow \forall\, \boldsymbol{n} \text{ entre } f(\boldsymbol{a}) \text{ y } f(\boldsymbol{b})\ \exists\, \boldsymbol{c} \in\ ]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[\ \mid f(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{n}.$$

Demostración. El segmento $\boldsymbol{I} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ se encuentra dentro de nuestro intervalo, por lo que el mapeo $g(\boldsymbol{x}) \coloneqq f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{n}$ está definido y es continuo en el segmento $\boldsymbol{I}$ y, como

$g(\boldsymbol{a}) \cdot g(\boldsymbol{b}) = (f(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{n})\,(f(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{n}) < 0$, entonces, por el teorema de Bolzano – Cauchy, existe un $\boldsymbol{c} \in\ ]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[\ \mid g(\boldsymbol{c}) = f(\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{n} = 0$. ■

Teorema 7.4 (Acotación). Sea f: $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \to \mathbb{R}$ un mapeo continuo en el segmento $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \subset \mathbb{R}$. Entonces, el mapeo f es acotado en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, es decir

$$f \in \mathscr{C}([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\,; \mathbb{R}) \Longrightarrow \text{el mapeo } f \text{ es acotado en } [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}].$$

Demostración. Por reducción al absurdo, supóngase que el mapeo f es acotado en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Divídase el segmento $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \eqqcolon \boldsymbol{I}_0$ por la mitad. Entonces el mapeo f no es acotado por lo menos en uno de los segmentos $[\boldsymbol{a}, \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}]$ ó $[\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}, \boldsymbol{b}]$. Denótese este por $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1] \eqqcolon \boldsymbol{I}_1$.

Divídase el segmento $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \eqqcolon \boldsymbol{I}_0$ por la mitad. Entonces el mapeo f no es acotado por lo menos en uno de los segmentos $[\boldsymbol{a}_1, \frac{\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1}{2}]$ ó $[\frac{\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1}{2}, \boldsymbol{b}_1]$. Denótese este por $[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2] \eqqcolon \boldsymbol{I}_2$, … y continuando así sucesivamente el proceso, se obtiene una sucesión de segmentos encajados

$$\boldsymbol{I}_0 \supset \boldsymbol{I}_1 \supset \boldsymbol{I}_2 \supset \cdots \supset \boldsymbol{I}_n \supset \cdots,$$

en los que $|\boldsymbol{I}_n| = \frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{2^{\boldsymbol{n}}}$ tiende a 0 cuando $\boldsymbol{n} \to \infty$ y por construcción f no es acotado en cada uno de los segmentos $\boldsymbol{I}_n\ \forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.

Por el teorema de Cantor, existe un único punto $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{I}_n\ \forall$ entero $\boldsymbol{n} \geq 0$.

f es continuo en el punto $\boldsymbol{c} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, es decir, $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{c}) = \mathrm{o}(1)$ cuando $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} = \mathrm{o}(1)$; entonces f es localmente acotado en $\boldsymbol{c}$, es decir, que $\exists\, \mathbf{E}_r(\boldsymbol{c}) \mid f(\boldsymbol{x})$ es acotado $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbf{E}_r(\boldsymbol{c})$.

$\forall\, \boldsymbol{r} > 0\ \exists\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} \mid \boldsymbol{I}_n \subset \mathbf{E}_r(\boldsymbol{c})$, por ejemplo $\boldsymbol{n} > \log_2\left(\frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{r}}\right)$; de donde $\frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{2^{\boldsymbol{n}}} < \boldsymbol{r}$. Por lo tanto $f(\boldsymbol{x})$ es acotado $\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}_n \subset \mathbf{E}_r(\boldsymbol{c})$, lo cual no es posible, puesto que por construcción f no es acotado en cada uno de los segmentos $\boldsymbol{I}_n\ \forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$. ■

Se puede demostrar también de la manera siguiente:

Como $f \in \mathscr{C}([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\,; \mathbb{R})$, para cualquier punto $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \eqqcolon \boldsymbol{I}$ se encuentra un entorno tal que en el conjunto $\mathbf{E}_{\boldsymbol{I}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{I} \cap \mathbf{E}(\boldsymbol{x})$ el mapeo f es acotado. La familia $\{\, \mathbf{E}(\boldsymbol{x}) \,\}_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}}$ forma una cubierta del segmento $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ con intervalos abiertos, de la cual se puede obtener una subfamilia finita $\{\, \mathbf{E}(\boldsymbol{x}_1), \mathbf{E}(\boldsymbol{x}_2), \ldots, \mathbf{E}(\boldsymbol{x}_n) \,\}$ que también cubre a $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. En cada el conjunto $\mathbf{E}_{\boldsymbol{I}}(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{I} \cap \mathbf{E}(\boldsymbol{x}_k)$ el mapeo f es acotado, es decir $\mathrm{m}_k \leq f(\boldsymbol{x}) \leq \mathrm{M}_k\ \ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbf{E}_{\boldsymbol{I}}(\boldsymbol{x}_k)$ donde $\mathrm{m}_k, \mathrm{M}_k \in \mathbb{R}$, por lo que $\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}$, se tiene $\min\{\, \mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2, \ldots, \mathrm{m}_n \,\} \leq f(\boldsymbol{x}) \leq \max\{\, \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \ldots, \mathrm{M}_n \,\}$ lo que demuestra que el mapeo f es acotado en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. ■

Teorema 8.4 (Máximo y Mínimo). Sea f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ un mapeo continuo en el segmento $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Entonces, f toma en el segmento $[a, b]$ sus valores máximo y mínimo, es decir

$$f \in \mathscr{C}([a, b]\,;\mathbb{R}) \Longrightarrow \exists\, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{m} \in [a, b] \;\Big|\; \boldsymbol{M} = \max f(x) \text{ y } \boldsymbol{m} = \min f(x).$$

Demostración. Como el mapeo f es continuo en el segmento $[a, b] =: \boldsymbol{I}$. Entonces, el mapeo f es acotado en $[a, b]$. Sean

$$\boldsymbol{M} = \sup_{x \in [a;b]} f(x) \text{ y } \boldsymbol{m} = \inf_{x \in [a;b]} f(x).$$

Supongamos que $f(x) < \boldsymbol{M}\;\; \forall\, x \in [a, b]$. Entonces el mapeo continuo $g(x) := \boldsymbol{M} - f(x) > 0$ no se anula en todo el segmento $\boldsymbol{I} = [a, b]$. Por lo tanto, el mapeo $\dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{\boldsymbol{M} - f(x)} > 0$ es un mapeo continuo y por lo tanto, acotado en $[a, b]$, es decir, que existe un $\boldsymbol{C} > 0 \;\Big|\; \dfrac{1}{g(x)} < \boldsymbol{C}\;\; \forall\, x \in [a, b]$. Pero entonces $g(x) = \boldsymbol{M} - f(x) > \dfrac{1}{\boldsymbol{C}}$, por lo cual $f(x) < \boldsymbol{M} - \dfrac{1}{\boldsymbol{C}}\;\; \forall\, x \in [a, b]$. Lo que contradice que $\boldsymbol{M} = \sup_{x \in [a;b]} f(x)$ sea la menor cota superior para la cual $f(x) < \boldsymbol{M}\;\; \forall\, x \in [a, b]$. Por lo tanto $\exists\, x_{\boldsymbol{M}} \in [a, b] \;\Big|\; f(x_{\boldsymbol{M}}) = \boldsymbol{M}$.

En forma análoga se puede tomando $\boldsymbol{m} = \inf_{x \in [a;b]} f(x)$ y utilizando el mapeo auxiliar $g(x) := f(x) - \boldsymbol{m} > 0$, para demostrar que $\exists\, x_{\boldsymbol{m}} \in [a, b] \;\Big|\; f(x_{\boldsymbol{m}}) = \boldsymbol{m}$. ■

Teorema 9.4. Sea f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ un mapeo continuo en el segmento $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Entonces, f es inyectivo si, y sólo f es estrictamente monótono en el segmento $[a, b]$, es decir

$$f \in \mathscr{C}([a, b]\,;\mathbb{R}) \Longrightarrow (f\colon [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R} \Longleftrightarrow f \text{ es estrictamente monótono en el segmento } [a, b])$$

Demostración. Si el mapeo f es estrictamente monótono en el segmento $[a, b]$, entonces es evidente que f es inyectivo, ya que en puntos distintos de $[a, b]$ toma valores distintos.

Sea f: $[a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}$ un mapeo inyectivo. Por reducción al absurdo, supongamos que hay tres puntos $x_1 < x_2 < x_3$ del segmento $[a, b]$, tales que $f(x_2)$ no se encuentra entre $f(x_1)$ y $f(x_3)$. Entonces ó $f(x_3)$ se encuentra entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$, ó $f(x_1)$ se encuentra entre $f(x_2)$ y $f(x_3)$. Sin perder generalidad, supongamos que $f(x_3)$ se encuentra entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$. Por hipótesis f es continuo en el segmento $[x_1, x_2]$, y por el teorema del valor intermedio contiene un punto x_3' tal que $f(x_3') = f(x_3)$. Entonces $x_3' < x_3$ y $f(x_3') = f(x_3)$, lo que contradice que f sea inyectivo. El caso cuando $f(x_1)$ se encuentra entre $f(x_2)$ y $f(x_3)$ es análogo. ■

Teorema 10.4. Cada mapeo f: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \subset \mathbb{R}$ definido en un conjunto $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}$ y que sea estrictamente monótono, tiene un mapeo inverso f^{-1}: $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}$ definido en el conjunto $\boldsymbol{B} = f(\boldsymbol{A})$, que es el conjunto de valores del mapeo f; y tiene en $\boldsymbol{B}$ el mismo tipo de monotonía que tiene f en el conjunto $\boldsymbol{A}$.

Demostración. El mapeo f es sobreyectivo, es decir $\boldsymbol{B} = f(\boldsymbol{A})$. Supongamos que f es creciente estrictamente en $\boldsymbol{A}$. En este caso

$$\forall\, x_1, x_2 \in \boldsymbol{A} \;\Big|\; x_1 \neq x_2, \text{ se tiene } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0.$$

En este caso, diferentes puntos tienen diferentes imágenes, es decir, el mapeo f es inyectivo. Por lo tanto el mapeo f es biyectivo, lo que significa que el mapeo inverso f^{-1}: $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$ dado por la relación $\boldsymbol{x} = f^{-1}(\boldsymbol{y}) \Longleftrightarrow \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ queda bien definido. De esta manera se tiene

$$\forall\ \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \boldsymbol{B} \ \Big| \ \boldsymbol{y}_1 \neq \boldsymbol{y}_2, \text{ se tiene que } \frac{f^{-1}(\boldsymbol{y}_2) - f^{-1}(\boldsymbol{y}_1)}{\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_1} > 0,$$

lo que significa que el mapeo f^{-1} es creciente en $\boldsymbol{B}$.

La demostración para el caso en que f es un mapeo decreciente, es análoga. ■

Definición 6.4. Un punto de discontinuidad $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$ de un mapeo f: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ se llama punto de discontinuidad evitable del mapeo f, si existe un mapeo continuo $\tilde{f}$: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ tal que las restricciones al conjunto $\boldsymbol{A}-\{\boldsymbol{a}\}$ coinciden, es decir, $f|_{\boldsymbol{A}-\{\boldsymbol{a}\}} = \tilde{f}|_{\boldsymbol{A}-\{\boldsymbol{a}\}}$: $\boldsymbol{A}-\{\boldsymbol{a}\} \to \mathbb{R}$.

Definición 7.4. Un punto de discontinuidad $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$ de un mapeo f: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ se llama punto de discontinuidad de primer género para el mapeo f, si existen los límites laterales

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}+} f(\boldsymbol{x}) =: f(\boldsymbol{a}^+) \quad \text{y} \quad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}-} f(\boldsymbol{x}) =: f(\boldsymbol{a}^-)$$

y por lo menos uno de ellos no coincide con la imagen $f(\boldsymbol{a})$ del punto $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ bajo el mapeo f.

Si $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ es un punto de discontinuidad del mapeo f: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$, entonces $\boldsymbol{a}$ es un punto de acumulación de $\boldsymbol{A}$. Sin embargo, puede suceder que $\boldsymbol{A} =]\ \boldsymbol{a}, +\infty\ [$; en este caso se toma en cuenta solamente el límite $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}+} f(\boldsymbol{x}) =: f(\boldsymbol{a}^+)$. Si por el contrario $\boldsymbol{A} =]\ -\infty, \boldsymbol{a}\ [$, entonces, en este caso, se toma en cuenta solamente el límite $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}-} f(\boldsymbol{x}) =: f(\boldsymbol{a}^-)$.

Definición 8.4. Un punto de discontinuidad $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$ de un mapeo f: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ se llama punto de discontinuidad de segundo género para el mapeo f, si no existe al menos uno de los límites laterales

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}+} f(\boldsymbol{x}) =: f(\boldsymbol{a}^+) \quad \text{ó} \quad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}-} f(\boldsymbol{x}) =: f(\boldsymbol{a}^-).$$

Teorema 11.4. Un mapeo f: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \subset \mathbb{R}$ definido y monótono en un conjunto $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}$ no puede tener otros puntos de discontinuidad, que no sean puntos de discontinuidad de primer género.

Demostración. Supongamos que el mapeo f creciente y que $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ es un punto de discontinuidad de f: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$. Como $\boldsymbol{a}$ no puede ser un punto aislado de $\boldsymbol{A}$, entonces es un punto de acumulación por lo menos de alguno de los dos conjuntos $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{a}}^{+} := \{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{x} > \boldsymbol{a}\}$ ó $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{a}}^{-} := \{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{x} < \boldsymbol{a}\}$. Como f es creciente en $\boldsymbol{A}$, entonces $\forall\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{a}}^{-}$, se tiene $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{a})$ y la restricción $f|_{\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{a}}^{-}}$ del mapeo f al conjunto $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{a}}^{-}$, es un mapeo creciente y acotado superiormente, por lo que existe el límite

$$\lim_{\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{a}}^{-}\ni\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} (f|_{\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{a}}^{-}})(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{A}\ni\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}^-} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}^-).$$

La demostración es análoga, si $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ es un punto de acumulación de $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{a}}^{+} := \{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{x} > \boldsymbol{a}\}$.

La demostración para el caso en que f es un mapeo decreciente, también es análoga. ■

Corolario. Si $a \in A \subseteq \mathbb{R}$ es un punto de discontinuidad de un mapeo monótono $f\colon A \to \mathbb{R}$, entonces

1) Por lo menos uno de los mapeos $\lim_{x\to a+} f(x) =: f(a^{+})$ ó $\lim_{x\to a-} f(x) =: f(a^{-})$ está bien definido.

2) Por lo menos en una de las desigualdades $f(a^{-}) \leq f(x) \leq f(a^{+})$, si f es creciente, tiene lugar el signo de desigualdad estricta $<$.

3) Por lo menos en una de las desigualdades $f(a^{-}) \geq f(x) \geq f(a^{+})$, si f es decreciente, tiene lugar el signo de desigualdad estricta $>$.

4) En el intervalo determinado por la correspondiente desigualdad estricta no hay ningún valor del mapeo;

5) Los intervalos que corresponden a diferentes puntos de discontinuidad de un mapeo monótono son disjuntos.

Demostración. Si $a \in A$ es un punto de discontinuidad del mapeo f, entonces es un punto de acumulación del conjunto A y, por el teorema anterior, es un punto de discontinuidad de primer género. Por lo tanto, al menos una de las bases $\mathscr{B}(a^{-})$ ó $\mathscr{B}(a^{+})$ queda definida por el punto a (o las dos al mismo tiempo), entonces existe el límite del mapeo f.

Supongamos que $f\colon A \to \mathbb{R}$ es un mapeo creciente. Puesto que a es un punto de discontinuidad, por lo menos en una de las desigualdades $f(a^{-}) \leq f(x) \leq f(a^{+})$, en realidad tiene lugar el signo de desigualdad estricta $<$. Puesto que $f(x) \leq \lim_{A\ni x\to a^{-}} f(x) = f(a^{-})$, si $x \in A$ y $x < a$, y análogamente $f(a^{+}) \leq f(x)$, si $x \in A$ y $a < x$, entonces el intervalo determinado por la desigualdad estricta $f(a^{-}) < f(a)$ ó $f(a) < f(a^{+})$ queda libre de los valores del mapeo.

Supongamos que $a_1 < a_2$ son dos diferentes puntos de discontinuidad del mapeo f. Entonces, como f es creciente, se tiene

$$f(a_1^{-}) \leq f(a_1) \leq f(a_1^{+}) \leq f(a_2^{-}) \leq f(a_2) \leq f(a_2^{+}).$$

De aquí se sigue que los intervalos que corresponden a diferentes puntos de discontinuidad de un mapeo monótono son disjuntos. ■

Corolario 2. El conjunto de los puntos de discontinuidad de un mapeo monótono $f\colon A \to \mathbb{R}$ es un conjunto contable.

Demostración. A cada punto de discontinuidad del mapeo monótono f, le corresponde, por el corolario anterior, un intervalo determinado por el valor del mapeo en el punto de discontinuidad, y uno de los límites laterales. Estos intervalos son disjuntos y en la recta real no puede haber más de una cantidad contable de intervalos disjuntos. Efectivamente, pues en cada uno de ellos se puede elegir un punto racional y por lo tanto la familia de los intervalos resulta equipotente a un subconjunto del conjunto de los números racionales. Significa que, la familia de los intervalos es una familia contable y, por lo tanto, el conjunto de los puntos de discontinuidad, que es equipotente a dicha familia, también es un conjunto contable. ■

Teorema 12.4 (Criterio de Continuidad). Un mapeo f: $[a, b] \rightarrow B$ monótono en $[a, b]$ es continuo en $[a, b]$ si, y sólo si $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$, si f es creciente ó $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$, si f es decreciente.

Demostración. Si f: $[a, b] \rightarrow B$ es un mapeo monótono y continuo en $[a, b]$, entonces todos los valores del mapeo f en $[a, b]$ quedan entre $f(a)$ y $f(b)$, puesto que el mapeo f es monótono. Pero como f es continuo, entonces, toma todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$. Por lo tanto, el conjunto de los valores del mapeo continuo y monótono f en $[a, b]$ es un segmento cuyos extremos son los puntos $f(a)$ y $f(b)$.

Supongamos ahora que f: $[a, b] \rightarrow B$ es un mapeo monótono en $[a, b]$. Si es discontinuo en algún punto $c \in [a, b]$, entonces, por el corolario 1, uno de los intervalos $]f(c^{-}), f(c)[$ ó $]f(c), f(c^{+})[$ de antemano está determinado y no contiene valores del mapeo f. Pero como f es un mapeo monótono, este intervalo está contenido en el segmento cuyos extremos son los puntos $f(a)$ y $f(b)$, por lo que si el mapeo monótono tiene al menos un punto de discontinuidad en el segmento $[a, b]$, entonces todo el segmento cuyos extremos son los puntos $f(a)$ y $f(b)$ no puede quedar dentro del conjunto de valores del mapeo f. ■

Teorema 13.4 (Mapeo Inverso). Un mapeo f: $A \rightarrow B$ que es estrictamente monótono en el conjunto $A \subset \mathbb{R}$, tiene un mapeo inverso f^{-1}: $B \rightarrow A \subset \mathbb{R}$ definido en el conjunto $B = f(A)$, que es el conjunto de valores del mapeo f. El mapeo f^{-1}: $B \rightarrow A$ tiene en B el mismo tipo de monotonía que tiene f en el conjunto A.

Si además, $A = [a, b]$ y f es un mapeo continuo en $[a, b]$, entonces el conjunto $B = f(A)$ es un segmento cuyos extremos son los puntos $f(a)$ y $f(b)$ y el mapeo f^{-1}: $B \rightarrow A$ es continuo en él.

Demostración. La primera parte se deduce del teorema .

Ahora, si $A = [a, b]$ y f es un mapeo continuo en $[a, b]$, por el teorema anterior, se sigue que el conjunto $B = f(A)$ es un segmento cuyos extremos son los puntos $f(a)$ y $f(b)$.

Demostremos que el mapeo f^{-1}: $B \rightarrow A$ es continuo en el segmento cuyos extremos son los puntos $f(a)$ y $f(b)$. Como el mapeo f^{-1} es monótono en B y B es un segmento, por lo que $f^{-1}(B) = A$ también es un segmento y por el teorema obtenemos que f^{-1} es un mapeo continuo en el segmento B cuyos extremos son los puntos $f(a)$ y $f(b)$. ■

§ 4.4 Continuidad de los Mapeos Trigonométricos

Teorema 22.3. Los mapeos trigonométricos *sen*: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y *cos*: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuos en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$.

Demostración. Por la convergencia absoluta de las series, se sigue directamente de la definición que

$$sen(a) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ y } cos(a) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{a^{2n}}{(2n)!}.$$ Además, puesto que $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\lim_{x \to a}$ sen(x) = sen(a) y $\lim_{x \to a}$ cos(x) = cos(a), lo significa que los mapeos *sen*: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y *cos*: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuos en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$. ■

De la definición se obtiene,

$$sen(x) - sen(a) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1} - a^{2n+1}}{(2n+1)!} = (x - a) \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x^{2n} + x^{2n-1}a + \cdots + x\, a^{2n-1} + a^{2n})}{(2n+1)!}$$

Cuando $(x - a) = o(1)$, por la convergencia absoluta de la última serie, se tiene,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(a^{2n} + a^{2n-1}a + \cdots + a\, a^{2n-1} + a^{2n})}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n+1)\, a^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{a^{2n}}{(2n)!} = O(1).$$

Por lo tanto, cuando $(x - a) = o(1)$, se tiene

$sen(x) - sen(a) = O(1)\,(x - a) + o(x - a) = O(1)\, o(1) + o(1) = o(1)$.
Análogamente, de la definición se obtiene,

$$cos(x) - cos(a) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n} - a^{2n}}{(2n)!} := -\frac{x^2 - a^2}{2!} + \frac{x^4 - a^4}{4!} - \frac{x^6 - a^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n} - a^{2n}}{(2n)!} + \cdots.$$

$$cos(x) - cos(a) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2} - a^{2n+2}}{(2n+2)!} := -(x - a) \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x^{2n+1} + x^{2n}\, a + \cdots + x\, a^{2n} + a^{2n+1})}{(2n+2)!}$$

Cuando $(x - a) = o(1)$, por la convergencia absoluta de la última serie, se tiene,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(a^{2n+1} + a^{2n}\, a + \cdots + a\, a^{2n} + a^{2n+1})}{(2n+2)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n+2)\, a^{2n+1}}{(2n+2)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} = O(1).$$

Por lo tanto, cuando $(x - a) = o(1)$, se tiene

$cos(x) - cos(a) = -O(1)\,(x - a) + o(x - a) = O(1)\, o(1) + o(1) = o(1)$, lo significa que los mapeos *sen*: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y *cos*: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuos en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$. ■

Teorema 25.3. Existe un mínimo número positivo $\boldsymbol{c}$ para el cual sen($\boldsymbol{c}$) = 0..

Demostración. En los extremos del intervalo [2, 4] el mapeo sen($\boldsymbol{x}$) toma los valores sen(2) y sen(4). Como 2 > 0 y 4 > 0, por el teorema de la sucesión

$\boldsymbol{S}_1 \leq \boldsymbol{S}_3 \leq \cdots \leq \boldsymbol{S}_{2n+1} \leq \cdots \leq \text{sen}(\boldsymbol{x}) \leq \cdots \leq \boldsymbol{S}_{2n} \leq \cdots \leq \boldsymbol{S}_2 \leq \boldsymbol{S}_0$ de las sumas parciales de la serie alternada, se tiene para $n = 1$,

$$\text{sen}(2) > 2 - \frac{2^3}{3!} = 2 - \frac{8}{6} = \frac{2}{3} > 0 \ \text{ y, para } n = 4,$$

$$\text{sen}(4) < 4 - \frac{4^3}{3!} + \frac{4^5}{5!} - \frac{4^7}{7!} + \frac{4^9}{9!} = 4 - \frac{32}{2} + \frac{128}{15} - \frac{1024}{315} + \frac{2048}{2835} = -\frac{268}{405} < 0.$$

El mapeo sen: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continuo en todos sus puntos. Entonces, por el teorema de Bolzano $\exists\, \boldsymbol{c} \in [2, 4]$ tal que sen($\boldsymbol{c}$) = 0.

El intervalo] 0, ∞ [es acotado inferiormente y por el axioma de continuidad, existe un mínimo $\boldsymbol{p} > 0$ para el cual sen($\boldsymbol{p}$) = 0 y, puesto que sen($\boldsymbol{x}$) > 0 para $\boldsymbol{x} \in\ ]0, 1[$, este $\boldsymbol{p} \geq 1$.

Definición 33.3. Definimos π como el menor número real positivo para el cual sen(π) = 0.

Corolario . Para cualquier $\boldsymbol{x} \in\ ]0, \pi[$ se cumple la desigualdad:

$$\text{sen}(\boldsymbol{x}) > 0$$

Demostración. Se deduce del hecho sen($\boldsymbol{x}$) > 0 para $\boldsymbol{x} \in\ ]0, 1[$, de la continuidad del mapeo sen: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y de la definición de π.

Corolario. $\forall\, \boldsymbol{x} \in\ ]\, 0, \frac{\pi}{2}\, [$ se cumple la desigualdad: cos($\boldsymbol{x}$) > 0

Demostración. Se deduce directamente del lema y de la identidad 5):

$$\text{sen}(\pi) = 2\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0. \ \blacksquare$$

De estas definiciones se pueden obtener prácticamente todas las identidades que se ocupan en el análisis. Por ejemplo, de las identidades 7), 5) y 6) correspondientemente, se obtienen los siguientes resultados:

$$\text{sen}(\pi) = 2\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \text{ (pero sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0\text{), es decir, } \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \text{ pero } \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \text{ por lo que } \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \text{ es decir, sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$\cos(\pi) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - 1 = -1.$$

Además: $\quad \text{sen}(\pi - \boldsymbol{x}) = \text{sen}(\boldsymbol{x}), \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \boldsymbol{x}\right) = -\cos(\boldsymbol{x});$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x); \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{sen}(x);$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x) \quad \text{y} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{sen}(x).$$

y por inducción se puede demostrar que $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sen}(x+2\pi k)=\operatorname{sen}(x)\ \forall\, k\in\mathbb{Z} \quad \text{y} \quad \cos(x+2\pi k)=\cos(x)\ \forall\, k\in\mathbb{Z}.$$

Es decir, las funciones sen: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cos: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, son periódicas y su periodo es $2\pi k$).

$\operatorname{sen}(\pi) = 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) - 4\operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$, de donde $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}$, esto es, $\boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}}$ y de 7), $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$, esto es, $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}}$.

De $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\cos^3\left(\frac{\pi}{6}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$, se obtiene $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$, esto es, $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}}$ y de 7), $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$, esto es, $\boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}}$.

De $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, se obtiene $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$ y de 7), $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, esto es, $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}}$ y $\boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

De las identidades $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \operatorname{sen}(x)$ y la identidad 9), se tiene $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$.

Por las identidades 5) y 9) $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{10}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ y $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = 4\cos^3\left(\frac{\pi}{10}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$, por lo que $2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = 4\cos^3\left(\frac{\pi}{10}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ y, puesto que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \neq 0$, se sigue entonces

$2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10}\right) = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) - 3 = 4\left(1-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\right) - 3 = 4 - 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{10}\right) - 3 = 1 - 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$, de donde $4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10}\right) - 1 = 0$. La solución de esta ecuación es $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. Considerando que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10}\right) > 0$, se tiene finalmente $\boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)}$, de donde $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}}}$.

De la identidad 6) se obtiene, $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)}$ y $\boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}}$.

Teorema 25.3. El mapeo sen: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es estrictamente en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Demostración. El mapeo cos: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continuo y $\cos(x) > 0\ \forall\ x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ puesto que $\cos(0) = 1$ y $\frac{\pi}{2}$ es el menor número positivo para el que $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Sean $x_1, x_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tales que $x_2 - x_1 > 0$. Entonces $sen(x_2) - sen(x_1) := 2\cos\frac{1}{2}(x_2 + x_1)\ \mathrm{sen}\frac{1}{2}(x_2 - x_1)$, en donde $\cos\frac{1}{2}(x_2 + x_1) > 0$, puesto que $\frac{1}{2}(x_2 + x_1) \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Además $\mathrm{sen}\frac{1}{2}(x_2 - x_1) > 0$, por la desigualdad $0 < \frac{1}{2}(x_2 - x_1) - \frac{1}{2^3}\frac{x_2^3 - x_1^3}{3!} \le \mathrm{sen}\frac{1}{2}(x_2 - x_1) \le \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$. Entonces $sen(x_2) - sen(x_1) > 0$. ■

Teorema 25.3. (Equivalencias asintóticas fundamentales)

1) $\sin(x) \sim x$ cuando $x = o(1)$, es decir, cuando $x \to 0$;
2) $\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2}$ cuando $x = o(1)$;
3) $\tan(x) \sim x$ cuando $x = o(1)$;
4) $\ln(1 + x) \sim x$ cuando $x = o(1)$;
5) $(1 + x)^\alpha \sim 1 + \alpha x$ cuando $x = o(1)$;
6) $a^x - 1 \sim x\ln(a)$ cuando $x = o(1)$;
7) $e^x \sim 1 + x$ cuando $x = o(1)$;
8) $\ln(x) \sim x - 1$ cuando $x - 1 = o(1)$, es decir, cuando $x \to 1$;
9) $(x^\alpha - 1) \sim \alpha(x - 1)$ cuando $x - 1 = o(1)$.

Demostración.

Las primeras dos equivalencias resultan directamente de la definición de sen y cos:

1) $sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = sen(x) = x + o(x)$ cuando $x \to 0$;

2) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ cuando $x = o(1)$;

3) $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sim \frac{x + o(x)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = x + o(x)$ cuando $x = o(1)$

4) $\frac{\ln(1 + x)}{x} = \ln(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \ln(e) + o(1) = 1 + o(1)$ cuando $x = o(1)$;

5) Por el desarrollo del binomio, $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ cuando $x = o(1)$
6) Haciendo $z := a^x - 1$, se tiene,

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{z\ln(a)}{\ln(1 + z)} = \frac{\ln(a)}{\ln(1 + z)^{\frac{1}{z}}} = \frac{\ln(a)}{\ln(e) + o(1)} = \frac{\ln(a)}{1 + o(1)} = \ln(a)\,(1 + o(1)) = \ln(a) + o(1);$$

7) Es un caso particular de 6), haciendo $a = e$;

8) Se deduce directamente de 4) haciendo $t = x - 1$, cuando $x - 1 = o(1)$,

9) Aplicando 8), se tiene que cuando $x - 1 = o(1)$, $(x^{\alpha} - 1) \sim \ln(x^{\alpha}) = \alpha\ln(x) \sim \alpha(x - 1)$;

Se puede obtener 2) también utilizando la identidades trigonométricas y las equivalencias 5) y 1), como sigue $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)} \sim 1 - \frac{1}{2}\sin^2(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2}$ cuando $x = o(1)$. ■

Ejemplos de cálculo de límites utilizando las equivalencias asintóticas:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c}\right)^{\frac{1}{x}}$ donde $a, b, c > 0$. Solución

$$\left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln\left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c}\right)^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c}\right)} \sim$$

$$\sim e^{\frac{1}{x}\left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} - 1\right)} = e^{\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{a\,(a^x - 1) + b\,(b^x - 1) + c\,(c^x - 1)}{x}\right)} \sim$$

$$\sim e^{\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{ax\ln(a) + bx\ln(b) + cx\ln(c)}{x}\right)} \sim e^{\ln(a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}} = (a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}.$$

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}{x - a}$ donde $a > 0$. Solución

$$\frac{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}{x - a} = \sqrt[m]{a}\,\frac{\sqrt[m]{\frac{x}{a}} - 1}{x - a} \sim \sqrt[m]{a}\,\frac{\frac{1}{m}\left(\frac{x}{a} - 1\right)}{x - a} = \sqrt[m]{a}\,\frac{\frac{1}{m}\left(\frac{x - a}{a}\right)}{x - a} = \sqrt[m]{a}\,\frac{\frac{1}{ma}(x - a)}{x - a} \sim \frac{\sqrt[m]{a}}{ma}.$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^3}$. Solución

$$\frac{\tan(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^3} = \frac{\operatorname{sen}(x)\left(\frac{1}{\cos(x)} - 1\right)}{x^3} = \frac{\operatorname{sen}(x)(1 - \cos(x))}{x^3\cos(x)} \sim \frac{x\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right)}{x^3\cos(x)} \sim \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2\cos(x)}$$

$$\sim \frac{1}{2\cos(x)} \sim \frac{1}{2}.$$

CAPÍTULO V
CÁLCULO DIFERENCIAL

§ 1.5 DIFERENCIACIÓN DE MAPEOS

Definición 9.4. Sea a un punto de acumulación de $A \subseteq \mathbb{R}$. El mapeo $f\colon A \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto a, si existe un mapeo $\mathrm{L} \cdot (x - a)$ lineal con relación a $(x - a)$, llamado diferencial del mapeo $f\colon A \to \mathbb{R}$ en el punto a; que cumple la igualdad

$$f(x) - f(a) = \mathrm{L} \cdot (x - a) + o(x - a) \text{ cuando } x - a = o(1).$$

El diferencial de un mapeo en un punto está definido unívocamente, puesto que

$$f(x) - f(a) = \mathrm{L} \cdot (x - a) + o(x - a) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \mathrm{L} + o(1),$$

$$\text{de donde } \lim_{A \ni x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{A \ni x \to a} (\mathrm{L} + o(1)) = \mathrm{L}$$

y, por el teorema de unicidad del límite, se tiene que el número L queda definido unívocamente.

Definición 10.4. El número

$$f'(a) \coloneqq \lim_{A \ni x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

se llama derivada (ó mapeo derivado) de f con respecto de x en el punto a.

Se puede escribir de forma equivalente

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + o(1) \text{ cuando } A \ni x - a = o(1).$$

o sea,

$$f(x) - f(a) = f'(a)\,(x - a) + o(x - a) \text{ cuando } x \to a,\ x \in A.$$

Sea $A^* \coloneqq \{\, x \in A \mid f\colon A \to \mathbb{R} \text{ es diferenciable en } x \,\}$

El mapeo $f'\colon A' \to \mathbb{R}$ definido por la relación $f'\colon a \to f'(a) = \lim\limits_{A \ni x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, $\forall\, a \in A^*$ donde el mapeo $f\colon A \to \mathbb{R}$ es diferenciable, se llama derivada (ó mapeo derivado) de f.

Al denotar la diferencia $h \coloneqq x - a$, llamada incremento de x; se obtiene

$$f(x + h) - f(x) = f'(x)\,h + o(h) \text{ cuando } h = o(1), \text{ es decir, cuando } h \to 0$$

y el mapeo $f'\colon A' \to \mathbb{R}$ queda entonces definido por la igualdad $f'(x) \coloneqq \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

La diferencial $\mathrm{L} \cdot (x - a)$ del mapeo f se denota por $df(a)$, es decir $df(a) = f'(a)\,(x - a)$.

En muchos de los casos, cuando a un mapeo f: $[\,a, b\,] \to \mathbb{R}$, definido en un segmento $[\,a, b\,] \subset \mathbb{R}$, se le quiere estudiar su comportamiento en los puntos extremos a y b; es necesario restringir el concepto de diferenciación definiendo la diferenciación lateral.

Definición 11.4. El mapeo f: $[\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ es diferenciable en a por la derecha, si

$$f(x) - f(a) = f'(a^+)\,(x - a) + o(x - a) \text{ cuando } x \to a,\ x \in [\,a, b\,],$$

en donde el límite

$$f'(a^+) := \lim_{[a;\, b] \ni x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

existe y es llamado derivada de f por la derecha del punto a.

Definición 12.4. El mapeo f: $[\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ es diferenciable en b por la izquierda, si

$$f(x) - f(b) = f'(b^-)\,(x - b) + o(x - b) \text{ cuando } x \to b,\ x \in [\,a, b\,],$$

en donde el límite

$$f'(b^-) := \lim_{[a;\, b] \ni x \to b^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

existe y es llamado derivada de f por la izquierda del punto b.

Definición 13.4. El mapeo f: $A \to \mathbb{R}$ es diferenciable en un conjunto $S \subseteq A$, si es diferenciable en cada punto a del conjunto S.

El mapeo f: $A \to \mathbb{R}$ es diferenciable en un segmento $[\,a, b\,] \subseteq A$ si es diferenciable en cada punto del intervalo $]\,a, b\,[\ \subseteq [\,a, b\,]$ y además f es diferenciable en a por la derecha y f es diferenciable en b por la izquierda.

La familia de todos los mapeos f: $A \to B \subseteq \mathbb{R}$ que son diferenciables en el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ se denota como $\mathcal{D}(\,A; B\,)$, es decir

$$\mathcal{D}(\,A; B\,) := \{f\colon A \to B \subseteq \mathbb{R} \mid f \text{ es un mapeo diferenciable en } A\,\}$$

Se puede escribir $\mathcal{D}(A)$ en lugar de $\mathcal{D}(\,A; \mathbb{R}\,)$.

La notación juega un papel muy importante en la matemática. J.L. Lagrange denotó el límite $\lim\limits_{A \ni x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ por $f'(a)$; W.G. Leibnitz denotó el límite $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ por $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$; y L. Arbogast sugirió que la derivada de un mapeo f fuera denotada como Df. El símbolo D llamado operador de derivación, ha tenido gran aceptación y sugiere que Df es un nuevo mapeo obtenido por el operador D. La diferencia $f(x) - f(a)$ W.G. Leibnitz la denotó como $\Delta f := f(x) - f(a)$ y la llamó incremento del mapeo; y a la diferencia $h := x - a$ la denotó como $\Delta x := x - a$ y la llamó incremento del argumento x, o simplemente incremento de x. En este caso, se tiene

$$\Delta f := f(x + h) - f(x) = f(x) - f(a) \quad \text{y} \quad \Delta x := h = x - a.$$

§ 2.5 Interpretación Geométrica de la Derivada y la Diferencial.

Teorema 1.5. Sea a un punto de acumulación de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$. El mapeo $f\colon A \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto a si, y sólo si f permite una aproximación lineal

$$f(x) = c_0 + c_1 (x - a) + o(x - a) \text{ cuando } x \to a,\, x \in A. \ (**)$$

Demostración. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ un mapeo, definido en un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ y a un punto de acumulación fijo de A. Se trata de encontrar un punto c_0 tal que, c_0 sea la mejor constante que caracterice el comportamiento del mapeo f en la vecindad del punto a, es decir

$$f(x) = c_0 + o(1) \text{ cuando } x \to a,\, x \in A. \qquad (*)$$

Esta última igualdad es equivalente a que $\lim\limits_{A \ni x \to a} f(x) = c_0$. Si, en particular, el mapeo es continuo en el punto a, entonces $\lim\limits_{A \ni x \to a} f(x) = f(a)$ y, por lo tanto $c_0 = f(a)$.

Tratemos ahora de encontrar un mapeo $c_0 + c_1 (x - a)$ tal que se pueda tener

$$f(x) = c_0 + c_1 (x - a) + o(x - a) \text{ cuando } x \to a,\, x \in A. \ (**)$$

lo que es una generalización del problema anterior, puesto que la igualdad (*) se puede escribir de la forma

$$f(x) = c_0 + o((x - a)^0) \text{ cuando } A \ni x - a = o(1).$$

De (**) se sigue inmediatamente que

$$c_1 = \lim_{A \ni x \to a} \frac{f(x) - c_0}{x - a}.$$

Y, en términos generales, si buscáramos un polinomio

$$P(a; x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \cdots + c_n(x - a)^n$$

tal que

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \cdots + c_n(x - a)^n + o((x - a)^n) \text{ cuando } A \ni x - a = o(1). \ (***)$$

Entonces encontraríamos sucesivamente los valores unívocos

$$c_0 = \lim_{A \ni x \to a} f(x),\ c_1 = \lim_{A \ni x \to a} \frac{f(x) - c_0}{x - a},\ \cdots,\ c_n = \lim_{A \ni x \to a} \frac{f(x) - (c_0 + c_1 + \cdots + c_{n-1}(x - a)^{n-1})}{x - a}$$

con la condición de que todos los límites existen; en caso contrario la condición (***) no se satisface y el problema no tiene solución.

Si el mapeo f es continuo en el punto a, entonces, como se ha mencionado, se sigue que $c_0 = f(a)$ y se obtiene la igualdad

$$f(x) - f(a) = c_1 (x - a) + o(x - a) \text{ cuando } x - a = o(1),\, x \in A.$$

que es equivalente a la condición de la diferenciación del mapeo f en el punto a.

De esta última igualdad se sigue que

$$c_1 = \lim_{A \ni x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a). \blacksquare$$

El mapeo $\varphi(x) \coloneqq c_0 + c_1 (x - a)$, en donde $c_0 = f(a)$ y $c_1 = f'(a)$, es el único mapeo de esa forma, que cumple la relación (***), por lo que el mapeo

$$\varphi(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

representa la mejor aproximación del mapeo f en una vecindad del punto a, en el sentido de que para cualquier otro mapeo $\psi(x) \coloneqq c_0 + c_1 (x - a)$, se tiene la diferencia $f(x) - \psi(x) \neq o(x - a)$ cuando $x - a = o(1)$, $x \in A$.

La gráfica del mapeo $\varphi(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ es la recta

$$y - f(a) = f'(a)(x - a),$$

que pasa por el punto $(a, f(a))$ y tiene una pendiente (coeficiente angular) de $f'(a)$ y, puesto que esta recta da la mejor aproximación del mapeo ó gráfica del mapeo $y = f(x)$ en una vecindad del punto $(a, f(a))$, se tiene la siguiente definición:

Definición 14.4. Sea $f: A \to \mathbb{R}$ un mapeo, definido en un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ y diferenciable en un punto $a \in A$. La recta $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ se llama tangente de la gráfica del mapeo f en el punto $P_a(a, f(a))$.

Definición 15.4. Sean $f, g: A \to \mathbb{R}$ dos mapeos continuos en un punto $a \in A$ de acumulación del conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$. Si $f(x) - g(x) = o((x - a)^n)$ cuando $x - a = o(1)$, $x \in A$, se dice que f y g son tangentes en el punto a en orden no menor que n.

De acuerdo a esta definición, el mapeo $\varphi(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ es tangente en el punto $a \in A$ al mapeo $f: A \to \mathbb{R}$, que es diferenciable en este punto.

Además, se puede decir que el polinomio

$$P_n(a; x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \cdots + c_n(x - a)^n$$

es tangente en el punto a, en orden no menor que n, al mapeo f.

La diferencia $h = x - a$ se puede ver como un vector, con punto inicial a, que define el valor $x = a + h$. La familia de vectores de este tipo la denotaremos como $T\mathbb{R}(a)$. En forma análoga, denotaremos como $T\mathbb{R}(f(a))$ a la familia de vectores definidos por la diferencias $f(x) - f(a)$. Entonces de la definición de diferencial, se sigue que el mapeo

$$df(a): T\mathbb{R}(a) \to T\mathbb{R}(f(a))$$

definido por la diferencial $h \to f'(a)\, h \eqqcolon df(a)\, h$ es tangente al mapeo

$$h \to f'(a + h) - f(a) \eqqcolon \Delta f(a; h).$$

dado por el incremento del mapeo diferenciable.

La diferencial $df(\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{h} = f'(\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{h}$ se define completamente por la derivada $f'(\boldsymbol{a})$ del mapeo f en el punto $\boldsymbol{a}$, el cual se puede encontrar como el límite

$$f'(\boldsymbol{a}) = \lim_{A \ni \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}}$$

§ 3.5 INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA DERIVADA Y LA DIFERENCIAL.

La interpretación física de la derivada es la velocidad de cambio de $f(\boldsymbol{x})$ en el momento $\boldsymbol{a}$ de tiempo; la interpretación geométrica de la derivada es el coeficiente angular de la tangente a la gráfica del mapeo $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ en el punto ($\boldsymbol{a}$, $f(\boldsymbol{a})$).

Supóngase que se quiere resolver el problema de Kepler de la ley de movimiento de dos cuerpos, por ejemplo, un planeta m con relación a una estrella M. Elíjase el origen de coordenadas cartesianas en M. Entonces la posición del planeta m en el momento t se puede determinar con las coordenadas $(x(\boldsymbol{t}), y(\boldsymbol{t}))$. El movimiento de m, con relación a M se realiza de acuerdo a dos leyes de Newton:

La ley general de movimiento $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ que relaciona al vector de fuerza $\boldsymbol{F}$ con el vector de aceleración $\boldsymbol{a}$ mediante un coeficiente de proporcionalidad m; y la ley de la gravitación universal, que permite encontrar la acción gravitacional entre los cuerpos M y m por la ecuación

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G}\,\frac{\mathrm{M}\cdot\mathrm{m}}{|\boldsymbol{r}|^3}\,\boldsymbol{r},$$

en donde $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t}) = (x(\boldsymbol{t}), y(\boldsymbol{t}))$ es el vector cuyo origen es M y extremo m, y $|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2(\boldsymbol{t}) + y^2(\boldsymbol{t})}$ es la longitud del vector $\boldsymbol{r}$., es decir, la distancia entre los cuerpos M y m.

La aceleración caracteriza el cambio de velocidad $v(\boldsymbol{t})$. La forma más simple de movimiento es el que se realiza por la inercia de un cuerpo libre, en la cual el cuerpo hace recorridos iguales en intervalos de tiempo iguales. A esto se lo llama movimiento rectilíneo uniforme. Si el cuerpo se mueve uniformemente y $r(0)$ y $r(1)$ son los vectores de radio en los momentos $\boldsymbol{t} = 0$ y $\boldsymbol{t} = 1$ respectivamente, entonces en cualquier instante de tiempo se tiene

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{r}(0) = v \cdot \boldsymbol{t},$$

en donde $v = \boldsymbol{r}(1) - \boldsymbol{r}(0)\cdot$ Así, el desplazamiento $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{r}(0)$ resulta, en el caso más simple, un mapeo lineal de tiempo y que juega el papel de coeficiente de proporcionalidad entre el desplazamiento $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{r}(0)$ y el tiempo $\boldsymbol{t}$. Este vector v se llama vector de velocidad del movimiento uniforme. Se ve que el movimiento es rectilíneo por la ecuación paramétrica de su trayectoria: $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{r}(0) + v \cdot \boldsymbol{t}$, que es la ecuación de una recta.

Si suponemos la ausencia de fuerzas exteriores, es decir, $\boldsymbol{F} = 0$, entonces la aceleración es nula, lo que significa que la velocidad no cambia con el tiempo con lo que se llega a la ley de inercia, mediante el cual un cuerpo se mueve a velocidad constante.

La velocidad $v(\boldsymbol{t})$ del cuerpo m en todos los instantes de tiempo cercanos a un momento t_0 deberá estar cercana al valor $v(\boldsymbol{t}_0)$ que se desea determinar. En este caso, el movimiento en una pequeña vecindad poco se diferencia del movimiento uniforme con velocidad $v(\boldsymbol{t}_0)$.

En nuestro problema se tiene entonces $v(t) \approx v(t_0)$ cuando el valor t es cercano al valor t_0, es decir, $v(t) - v(t_0) = o(1)$ cuando $t - t_0 = o(1)$. Entonces se deberá tener

$$\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0) \approx v(t_0) \cdot (t - t_0), \text{ cuando } t - t_0 = o(1), \text{ esto es,}$$

la diferencia $\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)$ es equivalente a $v(t_0) \cdot (t - t_0)$, cuando $t - t_0 = o(1)$, ó lo que es lo mismo,

$$\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0) = v(t_0) \cdot (t - t_0) + o(v(t_0) \cdot (t - t_0)), \text{ cuando } t - t_0 = o(1).$$

Aquí es necesario notar que $|v(t_0)\,(t - t_0)| = |v(t_0)|\,|t - t_0|$, por lo que si $v(t_0) \neq 0$, entonces $|v(t_0)\,(t - t_0)|$ es del mismo orden que $|t - t_0|$, y por esto $o(v(t_0) \cdot (t - t_0)) = o(t - t_0)$. Por lo tanto, se puede escribir

$$\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0) = v(t_0) \cdot (t - t_0) + o(t - t_0), \text{ cuando } t - t_0 = o(1).$$

lo que no cuando excluye el caso cuando $v(t_0) = 0$. La relación anterior es equivalente a la relación

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{t - t_0},$$

lo que se puede aceptar como definición de la velocidad instantánea del cuerpo en el momento t_0.

Como el vector $\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)$ tiene coordenadas $(x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0))$, entonces

$$\frac{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{t - t_0} = \left(\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}; \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}\right) \text{ y, por lo tanto}$$

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{t - t_0} = \left(\lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}; \lim_{t \to t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}\right)$$

En tal caso, si $v(t_0) \neq 0$, entonces $\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0) = v(t_0) \cdot (t - t_0)$ es la ecuación de la recta tangente a la línea de trayectoria del cuerpo en el punto $(x(t_0), y(t_0))$.

Entonces, el movimiento descrito por la mecánica clásica, mediante la relación $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$, se puede ver de la siguiente manera:

Si $r(t) = (x(t), y(t))$ es el radio vector de movimiento del cuerpo en movimiento $\boldsymbol{m}$ en el momento t; $v(t) = \dot{r}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ es el vector de velocidad de cambio $r(t)$ en el momento t; y $a(t) = \ddot{r}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t))$ es el vector de aceleración de cambio $v(t)$ en el momento t; entonces, la ecuación $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$, se puede escribir como

$$m \cdot \ddot{r}(t) = \boldsymbol{F}(t)$$

ó bien, el movimiento en el campo de gravitación en coordenadas toma la forma

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -GM \dfrac{x(t)}{\left[x^2(t) + y^2(t)\right]^{\frac{3}{2}}} \\[2ex] \ddot{y}(t) = -GM \dfrac{y(t)}{\left[x^2(t) + y^2(t)\right]^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

§ 4.5 PROPIEDADES ALGEBRAICAS DE LA DERIVADA.

Directamente de la definición se sigue que la derivada de un mapeo constante k: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ es cero, es decir $k' = 0$; puesto que $k(\boldsymbol{x}) - k(\boldsymbol{a}) = 0\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \mathrm{o}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$ cuando $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$.

Directamente de la definición se sigue que la derivada del mapeo identidad I: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$ es la unidad, es decir $\mathrm{I}' = 1$; puesto que $\mathrm{I}(\boldsymbol{x}) - \mathrm{I}(\boldsymbol{a}) = 1\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \mathrm{o}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$ cuando $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$.

Teorema 2.5. Sean f, g: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ dos mapeos diferenciables en un punto $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$. Entonces

1) El mapeo suma $f \pm g$: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $\boldsymbol{a}$, Además

$$(f \pm g)'(\boldsymbol{a}) = (f' \pm g')(\boldsymbol{a});$$

2) El mapeo producto fg: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $\boldsymbol{a}$, Además

$$(fg)'(\boldsymbol{a}) = (fg' + gf')(\boldsymbol{a});$$

3) El mapeo cociente $\frac{f}{g}$: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $\boldsymbol{a}$, si $g(\boldsymbol{a}) \neq 0$, Además

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{gf' - fg'}{g^2}\right)(\boldsymbol{a}).$$

Demostración. Como los mapeos f: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ y g: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ son diferenciables en el punto $\boldsymbol{a}$, entonces

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \mathrm{o}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}); \text{ y}$$

$$g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{a}) = g'(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \mathrm{o}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \text{ cuando } \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}.$$

Por lo tanto, cuando $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = \mathrm{o}(1)$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$, se tiene

1) $(f \pm g)(\boldsymbol{x}) - (f \pm g)(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{x}) \pm g(\boldsymbol{x}) - (f(\boldsymbol{a}) \pm g(\boldsymbol{a})) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) \pm (g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{a})) =$

$= f'(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \mathrm{o}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \pm [g'(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \mathrm{o}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})] = (f'(\boldsymbol{a}) \pm g'(\boldsymbol{a}))\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \mathrm{o}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) =$

$= (f' \pm g')(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \mathrm{o}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$, es decir,

$$(f \pm g)'(\boldsymbol{a}) = (f' \pm g')(\boldsymbol{a});$$

2) $(fg)(\boldsymbol{x}) - (fg)(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{x})\,g(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})\,g(\boldsymbol{a}) = [f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})]\,g(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{a})\,[g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{a})] =$

$= [f'(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \mathrm{o}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})]\,[g(\boldsymbol{a}) + \mathrm{o}(1)] + f(\boldsymbol{a})\,[g'(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \mathrm{o}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})] =$

$= (f'(\boldsymbol{a})\,g(\boldsymbol{a}))\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + (f(\boldsymbol{a})\,g'(\boldsymbol{a}))\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \mathrm{o}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) =$

$= [f(\boldsymbol{a})\,g'(\boldsymbol{a}) + g(\boldsymbol{a})\,f'(\boldsymbol{a})]\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \mathrm{o}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = (fg' + gf')(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \mathrm{o}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$, es decir,

$$(fg)'(\boldsymbol{a}) = (fg' + gf')(\boldsymbol{a});$$

3) $\left(\frac{f}{g}\right)(\boldsymbol{x}) - \left(\frac{f}{g}\right)(\boldsymbol{a}) = \frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} - \frac{f(\boldsymbol{a})}{g(\boldsymbol{a})} = \frac{1}{g(\boldsymbol{a})\,g(\boldsymbol{x})}\,[f(\boldsymbol{x})\,g(\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{a})\,g(\boldsymbol{x})] =$

$$= \left[\frac{1}{g^2(a)} - \frac{g(x) - g(a)}{g^2(a)\, g(x)} \right] \{[f(x) - f(a)]\, g(a) - f(a)\, [g(x) - g(a)]\} =$$

$$= \left[\frac{1}{g^2(a)} - \frac{\mathrm{o}(1)}{g^2(a)\, (g(a) + \mathrm{o}(1))} \right] \{[f'(a)(x - a) + \mathrm{o}(x - a)]\, g(a) - f(a)\, [g'(a)(x - a) + \mathrm{o}(x - a)]\} =$$

$$= \left(\frac{1}{g^2(a)} + \mathrm{o}(1) \right) \{[f'(a)g(a) - f(a)g'(a)]\, (x - a) + \mathrm{o}(x - a)\} =$$

$$= \frac{g(a)\, f'(a) - f(a)\, g'(a)}{g^2(a)} (x - a) + \mathrm{o}(x - a) = \left(\frac{gf' - fg'}{g^2} \right)(a)(x - a) + \mathrm{o}(x - a), \text{ es decir,}$$

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(a) = \left(\frac{gf' - fg'}{g^2} \right)(a).$$

En 2) y 3) el mapeo $g\colon A \to \mathbb{R}$ es continuo en el punto a, es decir, $g(x) - g(a) = \mathrm{o}(1)$ cuando $x \to a$, $x \in A$, y por lo tanto $\dfrac{g(x) - g(a)}{g^2(a)\, g(x)} = \dfrac{\mathrm{o}(1)}{g^2(a)\, (g(a) + \mathrm{o}(1))} = \mathrm{o}(1)$ cuando $x \to a$, $x \in A$. ■

Corolario. Sean f, g: $A \to \mathbb{R}$ dos mapeos diferenciables. Entonces, las derivadas de los mapeos suma, producto y cociente, en los puntos donde f y g son diferenciables, son

1) del mapeo suma $(f \pm g)' = f' \pm g'$
2) del mapeo producto $(fg)' = fg' + gf'$
3) del mapeo cociente $\left(\dfrac{f}{g} \right)' = \dfrac{gf' - fg'}{g^2}$ en los puntos donde $g \neq 0$. ■

Corolario. La derivada de cualquier combinación lineal de mapeos es igual a la combinación lineal de las derivadas de estos mapeos.

Demostración. Puesto que un mapeo constante es evidentemente diferenciable y su derivada es cero, entonces del teorema se sigue que

$$(c_1 f + c_2 g)' = (c_1 f)' + (c_2\, g)' = c_1\, f' + c_2\, g'$$

y por inducción se puede verificar que

$$(c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n)' = c_1\, f_1' + \cdots + c_n\, f_n' \text{ . ■}$$

Corolario. Si los mapeos $f_1, \ldots, f_n$ son diferenciables en un punto x entonces

$$(f_1 \cdot \cdots \cdot f_n)' = f_1'\, f_2 \cdots f_n + f_1\, f_2' \cdots f_n + \cdots + f_1\, f_2 \cdots f_n' .$$

Demostración. Para $n = 1$ es evidente. Si se verifica para un $n \in \mathbb{N}$, entonces, por el punto 2) del teorema, se verificará también para $(n + 1) \in \mathbb{N}$. ■

Corolario. Del teorema y de la definición de diferencial se obtiene que

1) $d(f \pm g) = df \pm dg$
2) del mapeo producto $d(fg) = f\, dg + g\, df$

3) del mapeo cociente $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}$ en los puntos donde $g \neq 0$.

Demostración.

1) $d(f \pm g)(\boldsymbol{a}) = (f \pm g)'(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = (f' \pm g')(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \pm g'(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) =$

$= df(\boldsymbol{a}) \pm d\,g(\boldsymbol{a})$;

2) $d(fg)(\boldsymbol{a}) = (fg)'(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = (fg' + gf')(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = (fg')(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + (gf')(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = = f(\boldsymbol{a})\,g'(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + g(\boldsymbol{a})\,f'(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{a})\,dg(\boldsymbol{a}) + g(\boldsymbol{a})\,df(\boldsymbol{a})$;

3) $d\left(\frac{f}{g}\right)(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{f}{g}\right)'(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = \frac{g(\boldsymbol{a})f'(\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{a})g'(\boldsymbol{a})}{g^2(\boldsymbol{a})}\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) =$

$= \frac{g(\boldsymbol{a})f'(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{a})g'(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})}{g^2(\boldsymbol{a})} = \frac{g(\boldsymbol{a})\,df(\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{a})\,dg(\boldsymbol{a})}{g^2(\boldsymbol{a})}$. ■

Teorema 3.5 (Diferencial del mapeo compuesto). Sea f: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$ un mapeo diferenciable en un punto $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$, y sea g: $\boldsymbol{B} \to \mathbb{R}$ un mapeo diferenciable en el punto $\boldsymbol{b} = f(\boldsymbol{a}) \in \boldsymbol{B}$. Entonces el mapeo composición $g \circ f$: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $\boldsymbol{a}$. Además, la diferencial $d(g\circ f)(\boldsymbol{a})$: $T\mathbb{R}(\boldsymbol{a}) \to T\mathbb{R}(g(f(\boldsymbol{a})))$ de la composición $g\circ f$ es igual a la composición $d\,g(\boldsymbol{b})\circ df(\boldsymbol{x})$ de los diferenciales

$$df(\boldsymbol{a})\colon T\mathbb{R}(\boldsymbol{a}) \to T\mathbb{R}(f(\boldsymbol{a})),\ \ d\,g(\boldsymbol{b})\colon T\mathbb{R}(\boldsymbol{b}) \to T\mathbb{R}(g(\boldsymbol{b})), \text{ en donde } \boldsymbol{b} = f(\boldsymbol{a}).$$

Demostración. Como el mapeo f: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $\boldsymbol{a}$, entonces

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b} = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + o(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \text{ cuando } \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = o(1),\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A};$$

y , como el mapeo g: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $\boldsymbol{b} = f(\boldsymbol{a})$, entonces

$$g(\boldsymbol{y}) - g(\boldsymbol{b}) = g'(\boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}) + o(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}) \text{ cuando } \boldsymbol{y} - \boldsymbol{b} = o(1),\ \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{B}. \text{ Además,}$$

$o(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}) = o(f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})) = o(f'(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + o(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})) = o(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + o(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = o(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$ cuando $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = o(1)$.

Por lo tanto, cuando $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = o(1)$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$, se tiene

$$\begin{aligned}
&(g \circ f)(\boldsymbol{x}) - (g \circ f)(\boldsymbol{a}) = g(f(\boldsymbol{x})) - g(f(\boldsymbol{a})) = g(\boldsymbol{y}) - g(\boldsymbol{b}) = g'(\boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}) + o(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}) = \\
&= g'(\boldsymbol{b})\,(f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})) + o(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = g'(\boldsymbol{b})\,(f'(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + o(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})) + o(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = \\
&= g'(\boldsymbol{b})\,f'(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + g'(\boldsymbol{b})\,o(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + o(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = g'(f(\boldsymbol{a}))\,f'(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + o(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = \\
&= ((g' \circ f)(\boldsymbol{a})\,f'(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + o(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = ((g' \circ f)\,f')(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + o(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}), \text{ es decir,}
\end{aligned}$$

$$(g \circ f)' = (g' \circ f)\,f'. \ ■$$

Corolario. Sea $(f_n \circ \cdots \circ f_1)$: $\boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$ la composición de los mapeos diferenciables f_1: $\boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{A}_2 \subseteq \mathbb{R}$, f_2: $\boldsymbol{A}_2 \to \boldsymbol{A}_3 \subseteq \mathbb{R}$, … , f_n: $\boldsymbol{A}_n \to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$ correspondientemente en los puntos $\boldsymbol{a}_1 \in \boldsymbol{A}_1 \subseteq \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a}_2 = f_1(\boldsymbol{a}_1) \in \boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{a}_3 = f_2(\boldsymbol{a}_2) \in \boldsymbol{A}_3$, … $\boldsymbol{a}_n = f_{n-1}(\boldsymbol{a}_{n-1}) \in \boldsymbol{A}_n$; es un mapeo diferenciable en el punto $\boldsymbol{a}_1 \in \boldsymbol{A}_1$. Además

$$(f'_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1) \cdot (f'_{n-1} \circ f_{n-2} \circ \cdots \circ f_1) \cdot \cdots \cdot (f'_2 \circ f_1) \cdot f'_1$$

Demostración. Para $n = 1$ es evidente. Si se verifica para un $n \in \mathbb{N}$, entonces, por el teorema anterior, se verificará también para $(n + 1) \in \mathbb{N}$. ■

Directamente de la definición se sigue que la derivada del mapeo idéntico $1_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la unidad, es decir $(1_{\mathbb{R}})' = 1$; puesto que $1_{\mathbb{R}}(x) - 1_{\mathbb{R}}(a) = (x - a)$ y, por lo que, cuando $x \to a$, $x \in A$, se tiene $1_{\mathbb{R}}(x) - 1_{\mathbb{R}}(a) = (x - a) + o(x - a)$, es decir, $(1_{\mathbb{R}})' = 1$.

§ 5.5 DERIVADA DEL MAPEO INVERSO.

Teorema 4.5. Sea $f: A \rightleftarrows B$ un mapeo biyectivo continuo en un punto $a \in A \subseteq \mathbb{R}$, y cuyo mapeo inverso $f^{-1}: B \rightleftarrows A$ es continuo en el punto $b = f(a) \in B \subseteq \mathbb{R}$. Si el mapeo f es diferenciable en el punto a y si $f'(a) \neq 0$, entonces, el mapeo inverso f^{-1} es diferenciable en el punto $b = f(a)$, y además

$$(f^{-1})'(b) = (f'(a))^{-1}.$$

Demostración. Como los mapeos $f: A \rightleftarrows B$ y $f^{-1}: B \rightleftarrows A$ son mutuamente inversos, entonces los valores $f(x) - f(a)$ y $f^{-1}(y) - f^{-1}(b)$ no se anulan cuando $y = f(x)$, para $x \neq a$. Como $f: A \rightleftarrows B$ es continuo en a, y $f^{-1}: B \rightleftarrows A$ es continuo en $b = f(a)$, entonces $y - b = o(1)$, $b \in B$; cuando $x - a = o(1)$, $x \in A$ y $y = f(x) \neq b$ para $x \neq a$. Para demostrar el teorema se utilizan el teorema del límite del mapeo compuesto y las propiedades algebraicas de los límites.

Como f es diferenciable en $a \in A$; se tiene

$f(x) - f(a) = f'(a)\,(x - a) + o(x - a)$ cuando $x \to a$, $x \in A$; o sea

$y - b = f'(a)\,(f^{-1}(y) - f^{-1}(b)) + o(f^{-1}(y) - f^{-1}(b))$, es decir

$y - b = (f'(a) + o(1))\,(f^{-1}(y) - f^{-1}(b))$, esto es, $(f'(a) + o(1))^{-1}\,(y - b) = (f^{-1}(y) - f^{-1}(b))$.

Por las propiedades de o(1), se tiene que

$$(f^{-1}(y) - f^{-1}(b)) = \frac{1}{f'(a) + o(1)} = \frac{1}{f'(a)} \frac{1}{1 + \frac{o(1)}{f'(a)}} = \frac{1}{f'(a)} \frac{1}{1 + o(1)} = \frac{1}{f'(a)}(1 + o(1)) = (f'(a))^{-1} + o(1),$$

esto es, $(f^{-1}(y) - f^{-1}(b)) = (f'(a))^{-1}\,(y - b) + o(y - b)$ cuando $y - b = o(1)$, $b \in B$, es decir, $(f^{-1}(b))' = (f'(a))^{-1}$. ■

§ 6.5 Derivadas de los Mapeos Logarítmicos y Exponenciales.

Ejemplo. El mapeo ln: $A \to \mathbb{R}$, es diferenciable en cualquier punto $a \in \mathbb{R}^+$.

Demostración. Cuando $x - a = o(1)$, $x \in A \subseteq \mathbb{R}^+$, y por la continuidad del mapeo logarítmico, se tiene

$$\ln(x) - \ln(a) = \ln\left(\frac{x}{a}\right) = \ln\left(1 + \frac{x-a}{a}\right) = \left(\frac{x-a}{a}\right) + o(x-a) = \frac{1}{a}(x-a) + o(x-a), \text{ es decir,}$$

$$\ln(x) - \ln(a) = \frac{1}{a}(x-a) + o(x-a), \text{ cuando } x - a = o(1),\ x \in A \subseteq \mathbb{R}^+.$$

Esto significa que $\ln'(a) = \dfrac{1}{a}$ $\forall\, a \in \mathbb{R}^+$, y por lo tanto se puede escribir $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Por el teorema de la composición de mapeos, se tiene que, para cualquier mapeo diferenciable $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, se tiene

$$(\ln \circ f)' = \ln'(f)\ f' = \frac{1}{f}\ f' = \frac{f'}{f}. \ ■$$

Ejemplo. Por las propiedades de los mapeo logarítmicos, $\log_a\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, donde $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ se tiene que, para cualquier mapeo diferenciable $f\colon A \to \mathbb{R}^+$, se tiene

$$(\log_a \circ f)' = \left(\frac{(\ln \circ f)}{\ln(a)}\right)' = \frac{(\ln \circ f)'}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a)}\frac{f'}{f}. \ ■$$

Definición 16. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}^+$ un mapeo positivo, y sea $g\colon A \to \mathbb{R}$, otro mapeo, en donde $A \subseteq \mathbb{R}$. Entonces, el mapeo exponencial-potencial $f^g\colon A \to \mathbb{R}^+$ se define por la igualdad

$$f^g(x) \coloneqq f(x)^{g(x)}.$$

Este mapeo queda definido también en los siguientes casos:

1) Cuando $f\colon A \to \mathbb{R}$, y $g\colon B \to \mathbb{Z} - \{0\}$, en donde $A \subseteq \mathbb{R}$;
2) Cuando $f\colon A \to \mathbb{R} - \{0\}$, y $g\colon B \to \mathbb{Z}$, en donde $A \subseteq \mathbb{R}$;

Ejemplo. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}^+$ un mapeo positivo, y sea $g\colon A \to \mathbb{R}$, otro mapeo, en donde $A \subseteq \mathbb{R}$. Supongamos que ambos mapeos son diferenciables en un punto $a \in A$. Entonces, el mapeo exponencial-potencial $f^g\colon A \to \mathbb{R}^+$, es diferenciable en $a \in A$.

Demostración. Por las propiedades de los logaritmos $(\ln \circ f^g) = g\,(\ln \circ f)$, se tiene,

$$(\ln \circ f^g)' = (g\,(\ln \circ f))', \text{ esto es, } \frac{(f^g)'}{f^g} = g\,(\ln \circ f)' + (\ln \circ f)\,g', \text{ de donde se obtiene}$$

$$(f^g)' = g\,f^g\,\frac{f'}{f} + f^g\,(\ln \circ f)\,g' = g\,f^{g-1}\,f' + f^g\,(\ln \circ f)\,g'. \ ■$$

Observación. El mismo resultado se puede obtener directamente. Los mapeos $f\colon A \to \mathbb{R}^+$ y $g\colon A \to \mathbb{R}$ son diferenciables en el punto a, entonces

$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) + o(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$; y

$g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{a}) = g'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) + o(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$ cuando $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$.

Por lo tanto, cuando $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a} = o(1)$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$, se tiene

$$f^g(\boldsymbol{x}) - f^g(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{x})^{g(\boldsymbol{x})} - f(\boldsymbol{a})^{g(\boldsymbol{a})} = f(\boldsymbol{x})^{g(\boldsymbol{x})} - f(\boldsymbol{a})^{g(\boldsymbol{x})} + f(\boldsymbol{a})^{g(\boldsymbol{x})} - f(\boldsymbol{a})^{g(\boldsymbol{a})} =$$

$$= f(\boldsymbol{a})^{g(\boldsymbol{x})}\left[\left(\frac{f(\boldsymbol{x})}{f(\boldsymbol{a})}\right)^{g(\boldsymbol{x})} - 1\right] + f(\boldsymbol{a})^{g(\boldsymbol{a})}\left[\, f(\boldsymbol{a})^{g(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{a})} - 1\,\right] =$$

$$= f(\boldsymbol{a})^{g(\boldsymbol{a})}\left[\ln\left(\frac{f(\boldsymbol{x})}{f(\boldsymbol{a})}\right)^{g(\boldsymbol{x})} + o(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\right] + f(\boldsymbol{a})^{g(\boldsymbol{a})}\{[g(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{a})]\ln(f(\boldsymbol{a})) + o(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\} =$$

$$= g(\boldsymbol{x})\, f(\boldsymbol{a})^{g(\boldsymbol{a})}\ln\left(\frac{f(\boldsymbol{x})}{f(\boldsymbol{a})}\right) + o(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a})^{g(\boldsymbol{a})}(\ln\circ f)(\boldsymbol{a})\,[g'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) + o(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})] + o(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) =$$

$$= [g(\boldsymbol{a}) + o(1)]\, f(\boldsymbol{a})^{g(\boldsymbol{a})}\left(\frac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})}{f(\boldsymbol{a})} + o(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\right) + f(\boldsymbol{a})^{g(\boldsymbol{a})}(\ln\circ f)(\boldsymbol{a})\, g'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) + o(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) =$$

$$= g(\boldsymbol{a})\, f(\boldsymbol{a})^{g(\boldsymbol{a})-1}[f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) + o(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})] + f(\boldsymbol{a})^{g(\boldsymbol{a})}(\ln\circ f)(\boldsymbol{a})\, g'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) + o(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) =$$

$= [\, g(\boldsymbol{a})\, f(\boldsymbol{a})^{g(\boldsymbol{a})-1} f'(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a})^{g(\boldsymbol{a})}(\ln\circ f)(\boldsymbol{a})\, g'(\boldsymbol{a})\,](\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) + o(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$, es decir, que cuando $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$, se tiene

$$f(\boldsymbol{x})^{g(\boldsymbol{x})} - f(\boldsymbol{a})^{g(\boldsymbol{a})} = (g\, f^{g-1} f' + f^g(\ln\circ f)g')(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) + o(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}).$$

Esto significa que $(f^g)'(\boldsymbol{a}) = (g\, f^{g-1} f' + f^g(\ln\circ f)\, g')(\boldsymbol{a})$ $\forall\, \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$, y por lo tanto se puede escribir como $(f^g)'(\boldsymbol{x}) = (g\, f^{g-1} f' + f^g(\ln\circ f)\, g')(\boldsymbol{x})$, es decir

$$(f^g)' = g\, f^{g-1} f' + f^g(\ln\circ f)\, g' .$$

El mapeo g: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ es continuo en el punto $\boldsymbol{a}$, es decir, $g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{a}) = o(1)$ cuando $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$. ■

Ejemplo. En particular si f: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}^+$ un mapeo positivo, y sea k: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$, un mapeo constante, en donde $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$. Suponiendo que ambos mapeos son diferenciables en $\boldsymbol{A}$. Entonces, el mapeo potencial f^k: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}^+$, es diferenciable en $\boldsymbol{A}$.

Demostración. Se tiene, $(f^k)' = k\, f^{k-1} f' + f^k(\ln\circ f)\, k' = k\, f^{k-1} f'$, es decir,

$(f^k)' = k\, f^{k-1} f'$. ■

§ 7.5 DERIVADAS DE LOS MAPEOS TRIGONOMÉTRICOS.

Teorema 22.3. Los mapeos trigonométricos $sen: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son diferenciables en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$.

Demostración. Por la convergencia absoluta de las series, se sigue directamente de la definición que

$$sen(x) - sen(a) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1} - a^{2n+1}}{(2n+1)!} := (x-a) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^{2n} + x^{2n-1}a + \cdots + x\, a^{2n-1} + a^{2n})}{(2n+1)!}$$

Cuando $(x - a) = o(1)$, se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(a^{2n} + a^{2n-1}a + \cdots + a\, a^{2n-1} + a^{2n})}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)\, a^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n}}{(2n)!} = \cos(a)$$

Por lo tanto, cuando $(x - a) = o(1)$, se tiene $sen(x) - sen(a) = \cos(a)\,(x - a) + o(x - a)$.

Análogamente,

$$cos(x) - cos(a) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n} - a^{2n}}{(2n)!} := -\frac{x^2 - a^2}{2!} + \frac{x^4 - a^4}{4!} - \frac{x^6 - a^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n} - a^{2n}}{(2n)!} + \cdots.$$

$$cos(x) - cos(a) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2} - a^{2n+2}}{(2n+2)!} := -(x-a) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^{2n+1} + x^{2n}a + \cdots + x\, a^{2n} + a^{2n+1})}{(2n+2)!}$$

Cuando $(x - a) = o(1)$, se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(a^{2n+1} + a^{2n}a + \cdots + a\, a^{2n} + a^{2n+1})}{(2n+2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+2)\, a^{2n+1}}{(2n+2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} = sen(a).$$

Por lo tanto, cuando $(x - a) = o(1)$, se tiene $cos(x) - cos(a) = -\,sen(a)\,(x - a) + o(x - a)$.

De lo anterior, se tiene, $sen'(x) = cos(x)$ y $cos'(x) = sen(x)$. Por la diferenciación del mapeo compuesto, si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un mapeo diferenciable,

$(sen \circ f)' = sen'(f)\, f' = cos(f)\, f' = (cos \circ f)\, f'$ y

$(cos \circ f)' = cos'(f)\, f' = -\,sen(f)\, f' = -\,(sen \circ f)\, f'$. ■

Por el teorema del residuo de Peano en la serie de Taylor, se tiene que, cuando $x \to 0$, $sen(x) = x + o(x)$. En particular, para $x \neq 0$, se tiene $\dfrac{sen(x)}{x} = 1 + o(1)$, es decir, $\lim_{x \to 0} \dfrac{sen(x)}{x} = 1$.

Análogamente, por el teorema del residuo de Peano en la serie de Taylor, se tiene $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + o(x^2)$, cuando $x \to 0$.

§ 7.5 DERIVADAS DE LOS MAPEOS TRIGONOMÉTRICOS.

Ejemplo. El mapeo sen: $A \to \mathbb{R}$, es diferenciable en cualquier punto $a \in A \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración. Cuando $x - a = o(1)$, $x \in A$, y por la continuidad del mapeo coseno, se tiene

$$\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(a) = 2 \cos\tfrac{1}{2}(x + a)\ \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(x - a) = 2\,[\cos(a) + o(1)]\,[\tfrac{1}{2}(x - a) + o(x - a)] =$$

$= \cos(a)\,(x - a) + o(x - a)$, es decir,

$$\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(a) = \cos(a)\,(x - a) + o(x - a) \text{ cuando } x \to a,\ x \in A.$$

Esto significa que $\operatorname{sen}'(a) = \cos(a)\ \forall\, a \in \mathbb{R}$, y por lo tanto se puede escribir $\operatorname{sen}'(x) = \cos(x)$.

Por el teorema de la composición de mapeos, se tiene que, para cualquier mapeo diferenciable f: $A \to \mathbb{R}$, donde $A \subseteq \mathbb{R}$, se tiene

$$(\operatorname{sen} \circ f)' = \operatorname{sen}'(f)\ f' = \cos(f)\ f' = (\cos \circ f)\ f'. \ \blacksquare$$

Aquí, los mapeos sen: $A \to \mathbb{R}$ y cos: $A \to \mathbb{R}$ son continuos en el punto a, por lo que,

$\cos\frac{1}{2}(x + a) = \cos\frac{1}{2}x \cos\frac{1}{2}a - \operatorname{sen}\frac{1}{2}x \operatorname{sen}\frac{1}{2}a = (\cos\frac{1}{2}a + o(1)) \cos\frac{1}{2}a - (\operatorname{sen}\frac{1}{2}a + o(1)) \operatorname{sen}\frac{1}{2}a =$

$= \cos^2\frac{1}{2}a - \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a + o(1) = \cos\frac{1}{2}(a + a) = \cos(a) + o(1)$ cuando $x \to a$, $x \in A$. $\blacksquare$

Ejemplo. El mapeo cos: $A \to \mathbb{R}$, es diferenciable en cualquier punto $a \in A \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración. Utilizando la identidad trigonométrica $\cos(f) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - f)$, se tiene,

$$(\cos \circ f)' = (\cos(f))' = (\operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2} - f))' = \cos(\tfrac{\pi}{2} - f)\,(\tfrac{\pi}{2} - f)' = \operatorname{sen}(f)\,(0 - f') = -\,(\operatorname{sen} \circ f)\ f'. \ \blacksquare$$

Observación. El mismo resultado se obtiene directamente. Cuando $x - a = o(1)$, $x \in A$, y por la continuidad del mapeo seno, se tiene

$\cos(x) - \cos(a) = -\,2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}(x + a) \operatorname{sen}\frac{1}{2}(x - a) = -\,2\,[\operatorname{sen}(a) + o(1)]\,[\frac{1}{2}(x - a) + o(x - a)] =$

$= -\operatorname{sen}(a)\,(x - a) + o(x - a)$, es decir,

$$\cos(x) - \cos(a) = -\operatorname{sen}(a)\,(x - a) + o(x - a) \text{ cuando } x - a = o(1),\ x \in A.$$

Esto significa que $\cos'(a) = -\operatorname{sen}(a)\ \forall\, a \in \mathbb{R}$, y por lo tanto se puede escribir como $\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x)$.

Y por el teorema de la composición de mapeos, se tiene que, para cualquier mapeo diferenciable f: $A \to \mathbb{R}$, donde $A \subseteq \mathbb{R}$,se tiene

$$(\cos \circ f)' = -\,(\operatorname{sen} \circ f)\ f'.$$

Ejemplo. Para cualquier mapeo diferenciable f: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \subseteq \{\, y \in \mathbb{R} \mid y \neq \frac{\pi}{2}(2\boldsymbol{k}+1),\ \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z} \,\}$, en donde $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$, se tiene

$$(\tan \circ f)' = (\sec \circ f)^2 f'.$$

Demostración. De las identidades trigonométricas, se sigue

$$(\tan \circ f)' = \left(\frac{\operatorname{sen} \circ f}{\cos \circ f}\right)' = \frac{(\cos \circ f)(\operatorname{sen} \circ f)' - (\operatorname{sen} \circ f)(\cos \circ f)'}{(\cos \circ f)^2} =$$

$$= \frac{(\cos \circ f)(\cos \circ f)\, f' + (\operatorname{sen} \circ f)(\operatorname{sen} \circ f)\, f'}{(\cos \circ f)^2} = \frac{(\cos \circ f)^2 + (\operatorname{sen} \circ f)^2}{(\cos \circ f)^2} f' = \frac{1}{(\cos \circ f)^2} f',\ \text{es decir,}$$

$$(\tan \circ f)' = (\sec \circ f)^2 f'. \ \blacksquare$$

Ejemplo. Para cualquier mapeo diferenciable f: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \subseteq \{\, y \in \mathbb{R} \mid y \neq \pi\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z} \,\}$, en donde $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$, se tiene

$$(\cot \circ f)' = -(\csc \circ f)^2 f'.$$

Demostración. De las identidades trigonométricas, se sigue

$$(\cot \circ f)' = \left(\frac{\cos \circ f}{\operatorname{sen} \circ f}\right)' = \frac{(\operatorname{sen} \circ f)(\cos \circ f)' - (\cos \circ f)(\operatorname{sen} \circ f)'}{(\operatorname{sen} \circ f)^2} =$$

$$= -\frac{(\operatorname{sen} \circ f)(\operatorname{sen} \circ f)\, f' + (\cos \circ f)(\cos \circ f)\, f'}{(\operatorname{sen} \circ f)^2} = -\frac{(\operatorname{sen} \circ f)^2 + (\cos \circ f)^2}{(\operatorname{sen} \circ f)^2} f' = \frac{-1}{(\operatorname{sen} \circ f)^2} f',\ \text{es decir,}$$

$$(\cot \circ f)' = -(\csc \circ f)^2 f'. \ \blacksquare$$

Ejemplo. Para cualquier mapeo diferenciable f: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \subseteq \{\, y \in \mathbb{R} \mid y \neq \frac{\pi}{2}(2\boldsymbol{k}+1),\ \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z} \,\}$, en donde $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$, se tiene

$$(\sec \circ f)' = (\tan \circ f)\,(\sec \circ f)\, f'.$$

Demostración. De las identidades trigonométricas, se sigue

$$(\sec \circ f)' = \left(\frac{1}{\cos \circ f}\right)' = -\frac{(\cos \circ f)'}{(\cos \circ f)^2} = -\frac{-(\operatorname{sen} \circ f)\, f'}{(\cos \circ f)^2} = (\tan \circ f)\,(\sec \circ f)\, f',\ \text{es decir,}$$

$$(\sec \circ f)' = (\tan \circ f)\,(\sec \circ f)\, f'. \ \blacksquare$$

Ejemplo. Para cualquier mapeo diferenciable f: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \subseteq \{\, y \in \mathbb{R} \mid y \neq \pi\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z} \,\}$, en donde $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$, se tiene

$$(\csc \circ f)' = -(\cot \circ f)\,(\csc \circ f)\, f'.$$

Efectivamente, de las identidades trigonométricas, se sigue

$$(\csc \circ f)' = \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \circ f}\right)' = -\frac{(\operatorname{sen} \circ f)'}{(\operatorname{sen} \circ f)^2} = -\frac{(\cos \circ f)\, f'}{(\operatorname{sen} \circ f)^2} = -(\cot \circ f)\,(\csc \circ f)\, f',\ \text{es decir,}$$

$$(\csc \circ f)' = -(\cot \circ f)\,(\csc \circ f)\, f'. \ \blacksquare$$

§ 8.5 DERIVADAS DE LOS MAPEOS TRIGONOMÉTRICOS INVERSOS.

Ejemplo. El mapeo sen: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$, en donde $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$; en general no es un mapeo biyectivo. Sin embargo la restricción sen: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightleftarrows [-1, 1]$, es biyectiva y tiene como mapeo inverso, el mapeo $\text{sen}^{-1}:[-1, 1] \rightleftarrows [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Mostremos que este mapeo es diferenciable en cualquier punto $\boldsymbol{y} = \text{sen}(\boldsymbol{x}) \in \,]-1, 1[$.

Demostración. Para $\boldsymbol{x} \in \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, se tiene $\boldsymbol{y}' = \text{sen}'(\boldsymbol{x}) = \cos'(\boldsymbol{x}) \neq 0$ y, $\boldsymbol{y} = \text{sen}(\boldsymbol{x}) \in \,]-1, 1[$. Aplicando el teorema del mapeo inverso, se tiene

$$(\text{sen}^{-1})'(\boldsymbol{y}) = (\text{sen}'(\boldsymbol{x}))^{-1} = \frac{1}{\text{sen}'(\boldsymbol{x})} = \frac{1}{\cos(\boldsymbol{x})} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2(\boldsymbol{x})}} = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{y}^2}}.$$

El signo del radical se eligió positivo, puesto que $\cos(\boldsymbol{x}) > 0$ cuando $\boldsymbol{x} \in \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Por el teorema de la composición de mapeos, se tiene que, para cualquier mapeo diferenciable $f: \boldsymbol{A} \to \,]-1, 1[$, donde $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$, se tiene

$$(\text{sen}^{-1} \circ f)' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}. \blacksquare$$

Ejemplo. El mapeo cos: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$, en donde $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$; en general no es un mapeo biyectivo. Sin embargo la restricción cos: $[0, \pi] \rightleftarrows [-1, 1]$, es biyectiva y tiene como mapeo inverso, el mapeo $\cos^{-1}:[-1, 1] \rightleftarrows [0, \pi]$. Mostremos que este mapeo es diferenciable en cualquier punto $\boldsymbol{y} = \cos(\boldsymbol{x}) \in \,]-1, 1[$.

Demostración. Para $\boldsymbol{x} \in \,]0, \pi[$, se tiene $\boldsymbol{y}' = \cos'(\boldsymbol{x}) = -\text{sen}'(\boldsymbol{x}) \neq 0$ y, $\boldsymbol{y} = \cos(\boldsymbol{x}) \in \,]-1, 1[$. Aplicando el teorema del mapeo inverso, se tiene

$$(\cos^{-1})'(\boldsymbol{y}) = (\cos'(\boldsymbol{x}))^{-1} = \frac{1}{\cos'(\boldsymbol{x})} = -\frac{1}{\text{sen}(\boldsymbol{x})} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\boldsymbol{x})}} = -\frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{y}^2}}.$$

El signo del radical se eligió positivo, puesto que $\text{sen}(\boldsymbol{x}) > 0$ cuando $\boldsymbol{x} \in \,]0, \pi[$.

Por el teorema de la composición de mapeos, se tiene que, para cualquier mapeo diferenciable $f: \boldsymbol{A} \to \,]-1, 1[$, donde $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$, se tiene

$$(\cos^{-1} \circ f)' = -\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}. \blacksquare$$

Ejemplo. El mapeo tan: $\boldsymbol{A} \rightleftarrows \mathbb{R}$, en donde $\boldsymbol{A} = \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\, \subset \mathbb{R}$; es un mapeo biyectivo. Mostremos que este mapeo es diferenciable en cualquier punto $\boldsymbol{y} = \tan(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$.

Demostración. Para $\boldsymbol{x} \in \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, se tiene $\boldsymbol{y}' = \tan'(\boldsymbol{x}) = \sec^2(\boldsymbol{x}) \neq 0$ y, $\boldsymbol{y} = \tan(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$. Aplicando el teorema del mapeo inverso, se tiene

$$(\tan^{-1})'(\boldsymbol{y}) = (\tan'(\boldsymbol{x}))^{-1} = \frac{1}{\tan'(\boldsymbol{x})} = \frac{1}{\sec^2(\boldsymbol{x})} = \frac{1}{1+\tan^2(\boldsymbol{x})} = \frac{1}{1+\boldsymbol{y}^2}.$$

Por el teorema de la composición de mapeos, se tiene que, para cualquier mapeo diferenciable f: $\boldsymbol{A} \to \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donde $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$, se tiene

$$(\tan^{-1} \circ f)' = \frac{f'}{1 + f^2}. \blacksquare$$

Ejemplo. El mapeo cot: $\boldsymbol{A} \rightleftarrows \mathbb{R}$, en donde $\boldsymbol{A} = \,]\,0, \pi\,[\, \subset \mathbb{R}$; es un mapeo biyectivo. Mostremos que este mapeo es diferenciable en cualquier punto $\boldsymbol{y} = \cot(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$.

Demostración. Para $\boldsymbol{x} \in \,]\,0, \pi\,[$, se tiene $\boldsymbol{y}' = \cot'(\boldsymbol{x}) = -\csc^2(\boldsymbol{x}) \neq 0$ y, $\boldsymbol{y} = \cot(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$. Aplicando el teorema del mapeo inverso, se tiene

$$(\cot^{-1})'(\boldsymbol{y}) = (\cot'(\boldsymbol{x}))^{-1} = \frac{1}{\cot'(\boldsymbol{x})} = -\frac{1}{\csc^2(\boldsymbol{x})} = -\frac{1}{1 + \cot^2(\boldsymbol{x})} = -\frac{1}{1 + \boldsymbol{y}^2}.$$

Por el teorema de la composición de mapeos, se tiene que, para cualquier mapeo diferenciable f: $\boldsymbol{A} \to \,]\,0, \pi\,[$, donde $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$, se tiene

$$(\cot^{-1} \circ f)' = -\frac{f'}{1 + f^2}. \blacksquare$$

Ejemplo. El mapeo sec: $\boldsymbol{A} \rightleftarrows \mathbb{R}$, en donde $\boldsymbol{A} = \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\, \subset \mathbb{R}$; es un mapeo biyectivo. Mostremos que este mapeo es diferenciable en cualquier punto $\boldsymbol{y} = \tan(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$.

Demostración. Para $\boldsymbol{x} \in \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, se tiene $\boldsymbol{y}' = \sec'(\boldsymbol{x}) = \sec(\boldsymbol{x}) \tan(\boldsymbol{x}) \neq 0$ y, $\boldsymbol{y} = \sec(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$. Aplicando el teorema del mapeo inverso, se tiene

$$(\sec^{-1})'(\boldsymbol{y}) = (\sec'(\boldsymbol{x}))^{-1} = \frac{1}{\sec'(\boldsymbol{x})} = \frac{1}{\sec(\boldsymbol{x}) \tan(\boldsymbol{x})} = \frac{1}{\sec(\boldsymbol{x}) \sqrt{\sec^2(\boldsymbol{x}) - 1}} = \frac{1}{\boldsymbol{y} \sqrt{\boldsymbol{y}^2 - 1}}.$$

Por el teorema de la composición de mapeos, se tiene que, para cualquier mapeo diferenciable f: $\boldsymbol{A} \to \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donde $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$, se tiene

$$(\sec^{-1} \circ f)' = \frac{f'}{f \sqrt{f^2 - 1}}. \blacksquare$$

Ejemplo. El mapeo csc: $\boldsymbol{A} \rightleftarrows \mathbb{R}$, en donde $\boldsymbol{A} = \,]\,0, \pi\,[\, \subset \mathbb{R}$; es un mapeo biyectivo. Mostremos que este mapeo es diferenciable en cualquier punto $\boldsymbol{y} = \csc(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$.

Demostración. Para $\boldsymbol{x} \in \,]\,0, \pi\,[$, se tiene $\boldsymbol{y}' = \csc'(\boldsymbol{x}) = -\csc(\boldsymbol{x}) \cot(\boldsymbol{x}) \neq 0$ y, $\boldsymbol{y} = \csc(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$. Aplicando el teorema del mapeo inverso, se tiene

$$(\csc^{-1})'(\boldsymbol{y}) = (\csc'(\boldsymbol{x}))^{-1} = \frac{1}{\csc'(\boldsymbol{x})} = -\frac{1}{\csc(\boldsymbol{x}) \cot(\boldsymbol{x})} = -\frac{1}{\csc(\boldsymbol{x}) \sqrt{\csc^2(\boldsymbol{x}) - 1}} = -\frac{1}{\boldsymbol{y} \sqrt{\boldsymbol{y}^2 - 1}}.$$

Por el teorema de la composición de mapeos, se tiene que, para cualquier mapeo diferenciable f: $\boldsymbol{A} \to \,]\,0, \pi\,[$, donde $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$, se tiene

$$(\csc^{-1} \circ f)' = -\frac{f'}{f \sqrt{f^2 - 1}}. \blacksquare$$

Ejemplo. Los mapeos $\exp_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ y $\log_a: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, en donde $a \in \mathbb{R} - \{1\}$; son inversos entre sí. Como se ha visto, ambos son diferenciables en cualquier punto de su respectivo dominio, con derivadas $\exp_a'(x) = a^x \ln(a)$ y $\log_a'(y) = \dfrac{1}{y\ln(a)}$. Comprobemos estos resultados aplicando el teorema del mapeo inverso.

$$\log_a'(y) = (\exp_a^{-1}(y))' = (\exp_a'(x))^{-1} = \frac{1}{\exp_a'(x)} = \frac{1}{a^x \ln(a)} = \frac{1}{y\ln(a)}.$$

$$\exp_a'(x) = (\log_a^{-1}(x))' = (\log_a'(y))^{-1} = \frac{1}{\log_a'(y)} = \frac{1}{\dfrac{1}{y\ln(a)}} = y\ln(a) = a^x \ln(a).$$

En particular, para $a = e$, se tiene:

$$\ln'(y) = (\exp^{-1}(y))' = (\exp'(x))^{-1} = \frac{1}{\exp'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y};$$

$$\exp'(x) = (\ln^{-1}(x))' = (\ln'(y))^{-1} = \frac{1}{\ln'(y)} = \frac{1}{\dfrac{1}{y}} = y = e^x.$$

§ 9.5 Mapeos Hiperbólicos y sus Derivadas.

Definición 17. Los mapeos senh: $A \to \mathbb{R}$, y cosh: $A \to \mathbb{R}$, donde $A \subseteq \mathbb{R}$, se definen por las respectivas igualdades

$$\operatorname{senh}(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

se llaman respectivamente seno hiperbólico y coseno hiperbólico.

Los mapeos senh y cosh son continuos, lo que se sigue inmediatamente de la definición anterior y de las propiedades del mapeo exp.

De manera similar de como se obtienen las propiedades de los mapeos trigonométricos, también se obtienen propiedades para los mapeos hiperbólicos.

1) $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x)$;
2) $\cosh(-x) = \cosh(x)$;
3) $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\operatorname{senh}(y)$;
4) $\operatorname{senh}(x-y) = \operatorname{senh}(x)\cosh(y) - \cosh(x)\operatorname{senh}(y)$;
5) $\operatorname{ch}(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y)$;
6) $\operatorname{ch}(x-y) = \cosh(x)\cosh(y) - \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y)$;
7) $\operatorname{senh}(2x) = 2\operatorname{senh}(x)\cosh(y)$;
8) $\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{senh}^2(x) + \cosh^2(x)$;
9) $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$
10) $\operatorname{senh}(x) + \operatorname{senh}(y) = 2\operatorname{senh}\frac{1}{2}(x+y)\ \cosh\frac{1}{2}(x-y)$;
11) $\operatorname{sh}(x) - \operatorname{sh}(y) = 2\cosh\frac{1}{2}(x+y)\ \operatorname{sh}\frac{1}{2}(x-y)$;
12) $\cosh(x) + \cosh(y) = 2\cosh\frac{1}{2}(x+y)\ \cosh\frac{1}{2}(x-y)$;
13) $\cosh(x) + \cosh(y) = 2\operatorname{senh}\frac{1}{2}(x+y)\ \operatorname{senh}\frac{1}{2}(x-y)$;

14) $\operatorname{senh}\left(\dfrac{x}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{\cosh(x) - 1}{2}}$;

15) $\cosh\left(\dfrac{x}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{\cosh(x) + 1}{2}}$;

Fórmula de Moivre:

16) $(\cosh(x) + \operatorname{senh}(x))^n = \cosh(nx) + \operatorname{senh}(nx)$

17) $(\cosh(x) - \operatorname{senh}(x))^n = \cosh(nx) - \operatorname{senh}(nx)$

De las definiciones de seno hiperbólico y coseno hiperbólico se siguen inmediatamente las siguientes propiedades:

Ejemplo. Los mapeos senh: $A \to \mathbb{R}$ y cosh: $A \to \mathbb{R}$, son diferenciables en cualquier punto $x \in A \subseteq \mathbb{R}$, lo que se sigue inmediatamente de las definiciones de senh, cosh y la diferenciación de exp.

Y, por el teorema de la composición de mapeos, se tiene que, para cualquier mapeo diferenciable f: $A \to \mathbb{R}$, donde $A \subseteq \mathbb{R}$,se tiene

$$(\operatorname{senh} \circ f)' = \left(\frac{e^f - e^{-f}}{2}\right)' = \frac{e^f + e^{-f}}{2} f' = (\cosh \circ f)\, f'; \text{ y}$$

$$(\cosh \circ f)' = \left(\frac{e^f + e^{-f}}{2}\right)' = \frac{e^f - e^{-f}}{2} f' = (\operatorname{senh} \circ f)\, f'. \blacksquare$$

Se definen también los mapeos:

$$\tanh(x) := \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}; \ \coth(x) := \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)}; \ \operatorname{sech}(x) := \frac{1}{\cosh(x)}; \text{ y } \operatorname{csch}(x) := \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}.$$

Ejemplo. Para cualquier mapeo diferenciable f: $A \to \mathbb{R}$, en donde $A \subseteq \mathbb{R}$, se tiene

$$(\tanh \circ f)' = \left(\frac{\operatorname{senh} \circ f}{\cosh \circ f}\right)' = \frac{(\cosh \circ f)(\operatorname{senh} \circ f)' - (\operatorname{senh} \circ f)(\cosh \circ f)'}{(\cosh \circ f)^2} =$$

$$= \frac{(\cosh \circ f)(\cosh \circ f)\, f' - (\operatorname{senh} \circ f)(\operatorname{senh} \circ f)\, f'}{(\cosh \circ f)^2} = \frac{(\cosh \circ f)^2 - (\operatorname{senh} \circ f)^2}{(\cosh \circ f)^2} f' =$$

$$= (\operatorname{sech} \circ f)^2 f'. \blacksquare$$

Ejemplo. Para cualquier mapeo diferenciable f: $A \to \mathbb{R} - \{ 0 \}$, en donde $A \subseteq \mathbb{R}$, se tiene

$$(\coth \circ f)' = \left(\frac{\cosh \circ f}{\operatorname{senh} \circ f}\right)' = \frac{(\operatorname{senh} \circ f)(\cosh \circ f)' - (\cosh \circ f)(\operatorname{senh} \circ f)'}{(\operatorname{senh} \circ f)^2} =$$

$$= \frac{(\operatorname{senh} \circ f)(\operatorname{senh} \circ f)\, f' - (\cosh \circ f)(\cosh \circ f)\, f'}{(\operatorname{senh} \circ f)^2} = -\frac{(\cosh \circ f)^2 - (\operatorname{senh} \circ f)^2}{(\operatorname{senh} \circ f)^2} f' =$$

$$= -(\operatorname{csch} \circ f)^2 f'. \blacksquare$$

Ejemplo. Para cualquier mapeo diferenciable f: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$, en donde $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$, se tiene

$$(\operatorname{sech} \circ f)' = \left(\frac{1}{\cosh \circ f}\right)' = -\frac{(\cosh \circ f)'}{(\cosh \circ f)^2} = -\frac{(\operatorname{senh} \circ f)\, f'}{(\cosh \circ f)^2} = (\tanh \circ f)\,(\operatorname{sech} \circ f)\, f'. \blacksquare$$

Ejemplo. Para cualquier mapeo diferenciable f: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R} - \{\, 0 \,\}$, en donde $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$, se tiene

$$(\operatorname{csch} \circ f)' = \left(\frac{1}{\operatorname{senh} \circ f}\right)' = -\frac{(\operatorname{senh} \circ f)'}{(\operatorname{senh} \circ f)^2} = -\frac{(\cosh \circ f)\, f'}{(\operatorname{senh} \circ f)^2} = -(\coth \circ f)\,(\operatorname{csch} \circ f)\, f'. \blacksquare$$

§ 10.4 MAPEOS HIPERBÓLICOS INVERSOS Y SUS DERIVADAS.

El mapeo senh es biyectivo y estrictamente creciente por lo que tiene un mapeo inverso definido en toda la recta real. El mapeo cosh estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^-$ y estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$; por lo que pueden definir dos mapeo inversos:

$$\cosh_-^{-1}\colon [\, 1, \infty \,[\ \to [\, -\infty, 1 \,[\ \text{ y } \cosh_+^{-1}\colon [\, 1, \infty \,[\ \to\ [\, 0, \infty \,[.$$

$(\operatorname{senh}^{-1} \circ f) = \ln(f + \sqrt{f^2 + 1}\,)$;

$(\cosh_+^{-1} \circ f) = \ln(f + \sqrt{f^2 - 1}\,)$; y $(\cosh_-^{-1} \circ f\,) = \ln(f + \sqrt{f^2 - 1}\,)$;

$(\tanh^{-1} \circ f) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1 + f}{1 - f}\right)$;

$(\coth^{-1} \circ f) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{f + 1}{f - 1}\right)$;

$(\operatorname{sech}_+^{-1} \circ f) = \ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{1 - f^2}}{f}\right)$; y $(\operatorname{sech}_-^{-1} \circ f\,) = \ln\left(\dfrac{1 - \sqrt{1 - f^2}}{f}\right)$;

$(\operatorname{csch}^{-1} \circ f) = \ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{1 + f^2}}{f}\right)$.

Para el cálculo de las derivadas se utiliza el teorema de la derivada del mapeo inverso.

Ejemplo. $(\operatorname{senh}^{-1})'(\boldsymbol{y}) = (\operatorname{senh}'(\boldsymbol{x}))^{-1} = \dfrac{1}{\operatorname{senh}'(\boldsymbol{x})} = \dfrac{1}{\cosh(\boldsymbol{x})} = \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\boldsymbol{x}) + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{\boldsymbol{y}^2 + 1}}$.

Para cualquier mapeo diferenciable f: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$, donde $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$, se tiene

$$(\,\operatorname{senh}^{-1} \circ f\,)' = \frac{f'}{\sqrt{f^2 + 1}}\,. \blacksquare$$

Ejemplo. $(\cosh_+^{-1})'(\boldsymbol{y}) = (\cosh'(\boldsymbol{x}))^{-1} = \dfrac{1}{\cosh'(\boldsymbol{x})} = \dfrac{1}{\operatorname{senh}(\boldsymbol{x})} = \dfrac{1}{\sqrt{\cosh^2(\boldsymbol{x}) - 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{\boldsymbol{y}^2 - 1}}$.

Análogamente $(\cosh_-^{-1})'(y) = (\cosh'(x))^{-1} = \dfrac{1}{\cosh'(x)} = \dfrac{1}{\operatorname{senh}(x)} = \dfrac{1}{-\sqrt{\cosh^2(x) - 1}} = \dfrac{-1}{\sqrt{y^2 - 1}}$.

Para cualquier mapeo diferenciable f: $A \to [\,1, +\infty\,[$, donde $A \subseteq \mathbb{R}$, se tiene

$$(\cosh_+^{-1} \circ f)' = \frac{f'}{\sqrt{f^2 - 1}} \quad \text{y} \quad (\cosh_-^{-1} \circ f)' = \frac{-f'}{\sqrt{f^2 - 1}}. \ \blacksquare$$

Ejemplo. $(\tanh^{-1})'(y) = (\tanh'(x))^{-1} = \dfrac{1}{\tanh'(x)} = \dfrac{1}{\operatorname{sech}^2(x)} = \dfrac{1}{1 - \tanh^2(x)} = \dfrac{1}{1 - y^2}$.

Para cualquier mapeo diferenciable f: $A \to \,]-1\,,\,1\,[$, donde $A \subseteq \mathbb{R}$, se tiene

$$(\tanh^{-1} \circ f)' = \frac{f'}{1 - f^2}. \ \blacksquare$$

Ejemplo. $(\coth^{-1})'(y) = (\coth'(x))^{-1} = \dfrac{1}{\coth'(x)} = \dfrac{1}{-\operatorname{csch}^2(x)} = \dfrac{-1}{\coth^2(x) - 1} = \dfrac{1}{1 - y^2}$.

Para cualquier mapeo diferenciable f: $A \to \mathbb{R} - [\,-1\,,\,1\,]$, donde $A \subseteq \mathbb{R}$, se tiene

$$(\coth^{-1} \circ f)' = \frac{-f'}{1 - f^2}. \ \blacksquare$$

Ejemplo. $(\operatorname{sech}^{-1})'(y) = (\operatorname{sech}'(x))^{-1} = \dfrac{1}{\operatorname{sech}'(x)} = \dfrac{1}{\operatorname{sech}(x)\tanh(x)} = \dfrac{1}{\operatorname{sech}(x)\sqrt{1 - \operatorname{sech}^2(x)}} = \dfrac{1}{y\sqrt{1 - y^2}}$.

Para cualquier mapeo diferenciable f: $A \to \,]\,0, 1\,[$, donde $A \subseteq \mathbb{R}$, se tiene

$$(\operatorname{sech}_+^{-1} \circ f)' = \frac{f'}{f\sqrt{1 - f^2}} \quad \text{y} \quad (\operatorname{sech}_-^{-1} \circ f)' = \frac{-f'}{f\sqrt{1 - f^2}}. \ \blacksquare$$

Ejemplo. $(\operatorname{csch}^{-1})'(y) = (\operatorname{csch}'(x))^{-1} = \dfrac{1}{\operatorname{csch}'(x)} = \dfrac{1}{-\operatorname{csch}(x)\coth(x)} = \dfrac{-1}{\operatorname{csch}(x)\sqrt{\csc^2(x) + 1}} = \dfrac{-1}{y\sqrt{y^2 + 1}}$.

Para cualquier mapeo diferenciable f: $A \to \,]\,0, +\infty\,[$, donde $A \subseteq \mathbb{R}$, se tiene

$$(\operatorname{csch}^{-1} \circ f)' = \frac{-f'}{f\sqrt{f^2 + 1}}. \ \blacksquare$$

§ 11.5 TABLA DE LAS DERIVADAS DE LOS MAPEOS ELEMENTALES.

1) $k' = 0$; donde k: $\boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ es un mapeo constante;
2) $(\mathrm{I})' = 1$; donde $\mathrm{I}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es el mapeo idéntico;
3) $(f \pm g)' = f' \pm g'$;
4) $(fg)' = fg' + gf'$;
5) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{gf' - fg'}{g^2}$;
6) $(kf)' = kf'$;
7) $\left(\dfrac{f}{k}\right)' = \dfrac{f'}{k}$;
8) $\left(\dfrac{k}{f}\right)' = -\dfrac{k}{f^2} f'$;
9) $(g \circ f)' = (g' \circ f)\, f'$;
10) $(f^{-1})' = (f')^{-1}$;
11) $(f^g)' = g\, f^{g-1}\, f' + f^g (\ln \circ f)\, g'$;
12) $(f^{\boldsymbol{k}})' = \boldsymbol{k}\, f^{\boldsymbol{k}-1}\, f'$;
13) $(\boldsymbol{a}^f)' = \boldsymbol{a}^f \ln(\boldsymbol{a})\, f'$;
14) $(\boldsymbol{e}^f)' = \boldsymbol{e}^f\, f'$;
15) $(\mathrm{sen} \circ f)' = (\cos \circ f)\, f'$;
16) $(\cos \circ f)' = -(\mathrm{sen} \circ f)\, f'$;
17) $(\tan \circ f)' = (\sec \circ f)^2\, f'$;
18) $(\cot \circ f)' = -(\csc \circ f)^2\, f'$;
19) $(\sec \circ f)' = (\tan \circ f)(\sec \circ f)\, f'$;
20) $(\csc \circ f)' = -(\cot \circ f)(\csc \circ f)\, f'$;
21) $(\mathrm{sen}^{-1} \circ f)' = \dfrac{f'}{\sqrt{1 - f^2}}$;
22) $(\cos^{-1} \circ f)' = -\dfrac{f'}{\sqrt{1 - f^2}}$;
23) $(\tan^{-1} \circ f)' = \dfrac{f'}{1 + f^2}$;
24) $(\cot^{-1} \circ f)' = -\dfrac{f'}{1 + f^2}$;
25) $(\sec^{-1} \circ f)' = \dfrac{f'}{f\sqrt{f^2 - 1}}$;
26) $(\csc^{-1} \circ f)' = -\dfrac{f'}{f\sqrt{f^2 - 1}}$;
27) $(\mathrm{senh} \circ f)' = (\cosh \circ f)\, f'$;
28) $(\cosh \circ f)' = (\mathrm{senh} \circ f)\, f'$;
29) $(\tanh \circ f)' = (\mathrm{sech} \circ f)^2\, f'$;
30) $(\coth \circ f)' = -(\mathrm{csch} \circ f)^2\, f'$;
31) $(\mathrm{sech} \circ f)' = (\tanh \circ f)(\mathrm{sech} \circ f)\, f'$;
32) $(\mathrm{csch} \circ f)' = -(\coth \circ f)(\mathrm{csch} \circ f)\, f'$;
33) $(\mathrm{senh}^{-1} \circ f)' = \dfrac{f'}{\sqrt{f^2 + 1}}$;

34) $(\cosh_+^{-1} \circ f)' = \dfrac{f'}{\sqrt{f^2 - 1}}\ f'$ y $(\cosh_-^{-1} \circ f)' = \dfrac{-f'}{\sqrt{f^2 - 1}}$;

35) $(\tanh^{-1} \circ f)' = \dfrac{f'}{1 - f^2}$;

36) $(\coth^{-1} \circ f)' = \dfrac{-f'}{1 - f^2}$;

37) $(\mathrm{sech}_+^{-1} \circ f)' = \dfrac{f'}{f\sqrt{1 - f^2}}$ y $(\mathrm{sech}_-^{-1} \circ f)' = \dfrac{-f'}{f\sqrt{1 - f^2}}$;

38) $(\mathrm{csch}^{-1} \circ f)' = \dfrac{-f'}{f\sqrt{f^2 + 1}}$.

§ 12.5 Derivada de un Mapeo dado en Forma Paramétrica.

Sean $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ y $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$ dos mapeos diferenciables definidos en una vecindad $\mathbf{U}(\boldsymbol{t}_0)$ de un punto $\boldsymbol{t}_0 \in \mathbb{R}$. Supongamos que el mapeo $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ tiene un mapeo inverso $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})$ definido en una vecindad $\mathbf{E}(\boldsymbol{x}_0)$ del punto $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$. Por la composición de mapeos, la igualdad $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$ se puede ver como un mapeo que implícitamente depende de $\boldsymbol{x}$, es decir $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})) = (\boldsymbol{y} \circ \boldsymbol{t})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$. Es decir, un mismo mapeo se ve como mapeo de diferentes argumentos. Por los teoremas de la diferenciación de la composición de mapeos y del mapeo inverso, y puesto que $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y} \circ \boldsymbol{t})(\boldsymbol{x})$, se tiene

$$\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y} \circ \boldsymbol{t})'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}'(\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}))\, \boldsymbol{t}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}'(\boldsymbol{t})\, \frac{1}{\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{t})} = \frac{\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{t})}.$$

§ 13.5 Derivadas de Orden Supeior.

Un mapeo diferenciable $f\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$, donde $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$, define un nuevo mapeo $f'\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, llamado derivada (ó mapeo derivado) de f. El mapeo $f'\colon\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, a su vez, puede ser diferenciable, y definir un nuevo mapeo $(f')'\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, derivado de f', llamado segunda derivada de f.

Definicion. Por inducción, si un mapeo $f^{(\boldsymbol{n}-1)}$ es la derivada de orden $\boldsymbol{n} - 1$ de f, y es diferenciable, entonces se dice que el mapeo f es $\boldsymbol{n}$ veces diferenciable, y el mapeo $f^{(\boldsymbol{n})}$, llamado derivada de orden $\boldsymbol{n}$ de f, queda definido por la igualdad

$$f^{(\boldsymbol{n})} \coloneqq (f^{(\boldsymbol{n}-1)})'.$$

Se considera, por definición, $f^{(0)} \coloneqq f$.

La familia de mapeos $f\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$, que tienen en $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$, derivada de orden $\boldsymbol{n}$, se denota por

$$\mathscr{D}^{(\boldsymbol{n})}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{B}).$$

y por $\mathscr{C}^{(\boldsymbol{n})}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{B})$ se denota la familia de mapeos $f\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$, que tienen en $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$, derivada continua de orden $\boldsymbol{n}$.

Escribiremos $\mathscr{C}^{(\boldsymbol{n})}(\boldsymbol{A})$ en lugar de $\mathscr{C}^{(\boldsymbol{n})}(\boldsymbol{A}; \mathbb{R})$ y $\mathscr{D}^{(\boldsymbol{n})}(\boldsymbol{A})$ en lugar de $\mathscr{D}^{(\boldsymbol{n})}(\boldsymbol{A}; \mathbb{R})$.

En particular $\mathscr{C}^{(0)}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{B}) = \mathscr{C}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{B})$ y $\mathscr{D}^{(0)}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{B}) = \mathscr{D}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{B})$.

Ejemplos.

f	f'	f''	f'''	$f^{(n)}$
$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$	$-\cos(x)$	$\operatorname{sen}\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$.
$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$	$-\cos(x)$	$\cos(x)$	$\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$.
$\exp_a(x)=a^x$	$a^x\ln(a)$	$a^x\ln^2(a)$	$a^x\ln^3(a)$	$a^x\ln^n(a)$.
$\exp(x)=e^x$	e^x	e^x	e^x	e^x.

Teorema 5.5. (Fórmula de Leibnitz). Sean $f, g\colon A\to B\subseteq\mathbb{R}$, dos mapeos que tienen en $A\subseteq\mathbb{R}$ derivadas de orden n. Entonces, la derivada de orden n del mapeo producto está dado por la igualdad

$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}\,g^{(k)},\quad\text{en donde }\binom{n}{k}:=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Demostración. Por inducción, para $n=1$, coincide con el teorema de la derivada del mapeo producto. Supóngase que los mapeos $f, g\colon A\to B\subseteq\mathbb{R}$, son $n+1$ veces diferenciables en A y supóngase que $(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}\,g^{(k)}$. Entonces, como $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$, se tiene

$$(fg)^{(n+1)}=((fg)^{(n)})'=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}\,g^{(k)}\right)'=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}\,g^{(k+1)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k+1)}\,g^{(k)}==$$

$$f^{(n+1)}g^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)f^{(n+1-k)}\,g^{(k)}+f^{(0)}g^{(n+1)}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(n+1-k)}\,g^{(k)}.\ \blacksquare$$

Ejemplo. Sea $P(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n$ un polinomio de grado n, entonces

$P(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n$; $\qquad P(0)=0!c_0$

$P'(x)=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\cdots+nc_nx^{n-1}$; $\qquad P'(0)=1!c_1$;

$P''(x)=2c_2+2\cdot3c_3x+3\cdot4c_4x^2+\cdots+(n-1)nc_nx^{n-2}$; $\qquad P''(0)=2!c_2$;

$P'''(x)=2\cdot3c_3+2\cdot3\cdot4c_1x+3\cdot4\cdot5c_2x^2+\cdots+(n-2)(n-1)nc_nx^{n-3}$; $\qquad P'''(0)=3!c_3$;

....

$P^{(n-1)}(x)=1\cdot2\cdot\cdots\cdot(n-2)(n-1)c_{n-1}+2\cdot3\cdot\cdots\cdot(n-1)nc_nx$; $\qquad P^{(n-1)}(0)=(n-1)!c_{n-1}$;

$P^{(n)}(x)=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot(n-3)(n-2)(n-1)nc_n$; $\qquad P^{(n)}(0)=n!c_n$;

$P^{(n+1)}(x)=0$;

De donde se obtiene

$$P(x)=P(0)+\frac{P'(0)}{1!}x+\frac{P''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

§ 14.5 TEOREMAS DEL VALOR MEDIO.

Definición 18. Sea f: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$ un mapeo definido en un conjunto $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$. Un punto $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$ se llama punto de máximo (mínimo) local de f, y su imagen llama máximo (mínimo) local de f, si existe una vecindad $\mathbf{E}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{c})$ del punto $\boldsymbol{c}$ en el conjunto $\boldsymbol{A}$, tal que

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbf{E}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{c}),\text{ se tiene } f(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{c}) \quad (f(\boldsymbol{x}) \ge f(\boldsymbol{c})).$$

Definición 19. Sea f: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$ un mapeo definido en un conjunto $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$. Un punto $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$ se llama punto de máximo (mínimo) local estricto de f, y su imagen llama máximo (mínimo) local estricto de f, si existe una vecindad $\mathbf{E}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{c})$ del punto $\boldsymbol{c}$ en el conjunto $\boldsymbol{A}$, tal que

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \overset{\circ}{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{c}),\text{ se tiene } f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{c}) \quad (f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{c})).$$

Definición 20. Sea f: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$ un mapeo definido en un conjunto $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$. Los puntos de máximo local y de mínimo local de f se llaman puntos de extremos locales de f, y sus imágenes se llaman extremos locales de f.

Definición 21. Sea f: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$ un mapeo definido en un conjunto $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$. Un punto $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$ se llama punto de extremo interior de f, si $\boldsymbol{a}$ es un punto de extremo local de f, y es un punto de acumulación para los conjuntos $\boldsymbol{A}_+ = \{\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{x} > \boldsymbol{c} \,\}$ y $\boldsymbol{A}_- = \{\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{x} < \boldsymbol{c} \,\}$.

Lema 3 (Fermat). Sea f: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$ un mapeo definido en un conjunto $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en un punto de extremo interior $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{A}$, entonces su derivada en este punto es cero, es decir, $f'(\boldsymbol{c}) = 0$.

Demostración. Como f es diferenciable en el punto de extremo interior $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{A}$, entonces

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{c}) = f'(\boldsymbol{c})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) + \mathrm{o}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) \quad \text{cuando } \boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} = \mathrm{o}(1),\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A},$$

es decir, $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{c}) = (f'(\boldsymbol{c}) + \mathrm{o}(1))\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c})$ cuando $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} = \mathrm{o}(1)$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$.

Como $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{A}$ es un punto de extremo interior de f, entonces existe una vecindad $\mathbf{E}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{c})$ del punto $\boldsymbol{c}$ en el conjunto $\boldsymbol{A}$, tal que

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbf{E}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{c}),\text{ se tiene } f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{c}) \ge 0 \ (\text{ ó } f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{c}) \le 0\ ).$$

Si fuera $f'(\boldsymbol{c}) \ne 0$, entonces $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbf{E}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{c})$, se tiene que $(f'(\boldsymbol{c}) + \mathrm{o}(1))$ tendría, por el teorema de conservación del signo, el mismo signo que $f'(\boldsymbol{c})$ en alguna una vecindad $\mathbf{E}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{c})$ de $\boldsymbol{c}$, y sin embargo el signo de la diferencia $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c})$ puede ser positivo ó negativo en $\mathbf{E}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{c})$, ya que $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{A}$ es un punto de extremo interior de f.

Por consiguiente, si $f'(\boldsymbol{c}) \ne 0$, entonces $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{c})$ tiene un signo constante, mientras que el signo de $(f'(\boldsymbol{c}) + \mathrm{o}(1))\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c})$ depende del signo de la diferencia $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}$. Esta contradicción demuestra la afirmación del lema. ■

El lema de Fermat muestra la condición necesaria para que un punto $\boldsymbol{c}$ sea un punto de extremo interior. Más delante se verá que dicha condición no es suficiente.

Teorema (Cauchy). Sean f, g: $[\ a, b\ ] \to \mathbb{R}$ dos mapeos continuos en el segmento $[\ a, b\ ]$ y diferenciables en el intervalo $]\ a, b\ [$, es decir, $f, g \in \mathscr{C}(\ [\ a, b\ ]\ ) \cap \mathscr{D}(\ ]\ a, b\ [\ )$. Entonces existe un punto $c \in\ ]\ a, b\ [$, para el cual

$$(g(b) - g(a))\ f'(c) = g'(c)\ (f(b) - f(a)).$$

Demostración. Como $f, g \in \mathscr{C}(\ [\ a, b\ ]\ ) \cap \mathscr{D}(\ ]\ a, b\ [\ )$, entonces el mapeo h: $[\ a, b\ ] \to \mathbb{R}$, definido por la igualdad

$$h(x) := (f(b) - f(a))\ g(x) - f(x)\ (g(b) - g(a)).$$

también pertenece a la clase $\mathscr{C}(\ [\ a, b\ ]\ ) \cap \mathscr{D}(\ ]\ a, b\ [\ )$. Además $h(a) = h(b)$.

Como $h \in \mathscr{C}(\ [\ a, b\ ]\ )$, entonces, por el teorema de se encuentran al menos dos puntos x_M , $x_m \in\ ]\ a, b\ [$, en los cuales h alcanza correspondientemente, sus valores máximo y mínimo en este segmento. Si $h(x_M) = h(x_m)$, entonces h es un mapeo constante en $[\ a, b\ ]$ y, por lo tanto, $h'(x) = 0$ $\forall\ x \in [\ a, b\ ]$. Si por el contrario $h(x_M) > h(x_m)$, entonces uno de los puntos x_M ó x_m deberá ser un punto interior del intervalo $]\ a, b\ [$. Denotando a este punto como c obtenemos, por el lema de Fermat, que $h'(c) = 0$ y, por lo tanto

$$h'(c) = (f(b) - f(a))\ g'(c) - f'(c)\ (g(b) - g(a)) = 0$$

de donde se deduce la afirmación del teorema. ■

Corolario (Teorema de Lagrange). Sea f: $[\ a, b\ ] \to \mathbb{R}$ un mapeo continuo en el segmento $[\ a, b\ ]$ y diferenciable en el intervalo $]\ a, b\ [$, es decir, $f \in \mathscr{C}(\ [\ a, b\ ]\ ) \cap \mathscr{D}(\ ]\ a, b\ [\ )$. Entonces existe un punto $c \in\ ]\ a, b\ [$, para el cual

$$f(b) - f(a) = f'(c)\ (b - a).$$

Demostración. Se deduce aplicando el teorema de Cauchy para el mapeo f y el mapeo identidad $1 \in \mathscr{C}(\ [\ a, b\ ]\ ) \cap \mathscr{D}(\ ]\ a, b\ [\ )$, es decir

$$(f(b) - f(a))\ 1 = f'(c)\ (b - a).\ ■$$

El teorema de Lagrange es llamado también teorema del valor medio ó teorema de los incrementos finitos.

Corolario (Teorema de Rolle). Sea f: $[\ a, b\ ] \to \mathbb{R}$ un mapeo continuo en el segmento $[\ a, b\ ]$ y diferenciable en el intervalo $]\ a, b\ [$, es decir, $f \in \mathscr{C}(\ [\ a, b\ ]\ ) \cap \mathscr{D}(\ ]\ a, b\ [\ )$. Supongamos que $f(b) = f(a)$. Entonces existe un punto $c \in\ ]\ a, b\ [$, para el cual

$$f'(c) = 0.$$

Demostración. Se deduce aplicando el teorema de Lagrange para el mapeo f, tomando en cuenta que $f(b) = f(a)$, es decir

$$0 = (f(b) - f(a)) = f'(c)\ (b - a).\ ■$$

Corolario (Regla de L'Hôpital). Sean f, g: $]\,\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\,[\to \mathbb{R}$ dos mapeos diferenciables en el intervalo $]\,\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\,[$, es decir, $f, g \in \mathscr{D}(\,]\,\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\,[\,)$ (donde $-\infty \leq \boldsymbol{a} < \boldsymbol{b} \leq +\infty$). Supóngase además, que $g'(x) \neq 0$ en $]\,\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\,[$, y que

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \boldsymbol{p}, \text{ donde } -\infty \leq \boldsymbol{p} \leq +\infty.$$

1) si $f(x) = \mathrm{o}(1)$ y $g(x) = \mathrm{o}(1)$ cuando $x \to a^+$, ó

2) si $\lim_{x \to a^+} g(x) = \infty$ cuando $x \to a^+$,

Entonces $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \boldsymbol{p}$.

Un teorema análogo se cumple para cuando $x \to b^-$.

Demostración. Supongamos primero que $\boldsymbol{p} < +\infty$. Tómense dos números fijos $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$ tales que $\boldsymbol{p} < \boldsymbol{r} < \boldsymbol{s}$. Como $\frac{f'(x)}{g'(x)} - \boldsymbol{p} = \mathrm{o}(1)$ cuando $x \to a^+$, entonces existe un punto $x_0 \in]\,a, b\,[$, tal que $\forall$ $x \in]\,a, x_0\,[$ se tendrá $\frac{f'(x)}{g'(x)} < \boldsymbol{r} < \boldsymbol{s}$. Como $g'(x) \neq 0$ en $]\,a, b\,[$, $g(x)$ es estrictamente monótona en el intervalo $]\,a, b\,]$, y pro lo tanto se puede elegir un punto $x_1 \in]\,a, x_0\,[$ tal que $g(x) \neq 0$ en $]\,a, x_1\,[$.

Para dos puntos $x, y \in]\,a, x_1\,[$, por el teorema de Cauchy, existe un punto $c \in]\,a, x_1\,[$, para el cual

$$(f(x) - f(y))\, g'(c) = f'(c)\, (g(x) - g(y))$$

de donde se tiene que $\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < \boldsymbol{r}$, si $x, y \in]\,a, x_1\,[$.

En el caso 1) si $f(y) = \mathrm{o}(1)$ y $g(y) = \mathrm{o}(1)$ cuando $y \to a^+$, se tiene

$$\frac{f(x) - \mathrm{o}(1)}{g(x) - \mathrm{o}(1)} < \boldsymbol{r}, \implies \frac{f(x)}{g(x)} \leq \boldsymbol{r} < \boldsymbol{s}, \text{ si } x, y \in]\,a, x_1\,[.$$

En el caso 2) si $\lim_{x \to a^+} g(x) = \infty$ cuando $x \to a^+$, con un y fijo, se tiene

$$\frac{g(x) - g(y)}{g(x)} = 1 - \frac{g(y)}{g(x)} > 0, \text{ por lo que}$$

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \cdot \frac{g(x) - g(y)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x)} < \boldsymbol{r}\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right), \text{ esto es}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} < \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}\,\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} < \boldsymbol{s}.$$

En ambos casos, existe un intervalo $]\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x_s}\, [$, tal que en cualquiera de sus puntos se tiene $\dfrac{f(x)}{g(x)} < \boldsymbol{s}$.

Como $\boldsymbol{s}$ es un número arbitrario, tal que $\boldsymbol{p} < \boldsymbol{s}$, entonces para $\boldsymbol{p} = -\infty$, la regla de L'Hôpital queda demostrada.

Si, en cambio $-\infty < \boldsymbol{p}$, entonces se pueden tomar dos números fijos $-\boldsymbol{r}$, $-\boldsymbol{s}$ tales que $\boldsymbol{p} > -\boldsymbol{r} > -\boldsymbol{s}$ y de forma análoga, se encuentra un intervalo $]\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x_{-s}}\, [$, tal que en cualquiera de sus puntos se tiene $\dfrac{f(x)}{g(x)} > -\boldsymbol{s}$.

Como $-\boldsymbol{s}$ es un número arbitrario, tal que $\boldsymbol{p} > -\boldsymbol{s}$, entonces para $\boldsymbol{p} = +\infty$, la regla de L'Hôpital queda demostrada.

Si, por último, $-\infty < \boldsymbol{p} < +\infty$, entonces para cualquier par de números $\boldsymbol{r}$, $-\boldsymbol{r}$, tales que $-\boldsymbol{r} < \boldsymbol{p} < \boldsymbol{r}$, se encuentra un intervalo $]\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x_s}\, [\ \cap\ ]\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x_{-s}}\, [$, tal que en cualquiera de sus puntos se tiene $-\boldsymbol{r} < \dfrac{f(x)}{g(x)} < \boldsymbol{r}$, es decir, $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} - \boldsymbol{p} = o(1)$ cuando $x \to \boldsymbol{a}^+$.

Análogo se puede demostrar para cuando $x \to \boldsymbol{b}^-$. ■

Corolario (Monotonía de los Mapeos). Sea f: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$ un mapeo definido en un conjunto $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$. Si la derivada f' de f es no negativo (no positivo) en cualquier punto de un intervalo $]\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\, [\ \subseteq \boldsymbol{A}$, entonces el mapeo f no decrece (no crece) en este intervalo.

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in\ ]\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\, [$ dos puntos del intervalo, tales que $x_1 < x_2$, es decir, $x_2 - x_1 > 0$. Entonces, de acuerdo al teorema de Lagrange, para el mapeo f, existe un punto $\boldsymbol{c} \in\ ]\, x_1, x_2\, [$, para el cual

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\boldsymbol{c})\,(x_2 - x_1).$$

En este caso el signo de $f(x_2) - f(x_1)$ coincide con el signo de $f'(\boldsymbol{c})$. ■

Corolario (Mapeos Inverso). Sea f: $\boldsymbol{I} \to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$ un mapeo definido en un intervalo $\boldsymbol{I} \subseteq \mathbb{R}$. Si la derivada f' de f es positivo (negativo) en cualquier punto de $\boldsymbol{I}$, entonces el mapeo f es continuo y monótona en $\boldsymbol{I}$, y tiene un mapeo inverso f^{-1}, definido en el intervalo $f(\boldsymbol{I})$ y diferenciable en él.

Demostración. Se deduce del corolario anterior y el teorema del mapeo inverso. ■

Corolario (Mapeo Constante). Un mapeo f: $[\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\,] \to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$ continuo en el segmento $[\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\,]$ es constante en $[\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\,]$ si, y sólo si, su derivada es nula en cualquier punto del intervalo $]\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\, [$.

Demostración. Demostremos que, si $f'(x) = 0\ \forall\ x \in\ ]\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\, [$, entonces el mapeo f es constante en $[\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\,]$.

Sean $x_1, x_2 \in\ ]\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\, [$ dos puntos del intervalo, tales que $x_1 < x_2$, es decir, $x_2 - x_1 > 0$. Entonces, de acuerdo al teorema de Lagrange, para el mapeo f, existe un punto $\boldsymbol{c} \in\ ]\, x_1, x_2\, [$, para el cual

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\boldsymbol{c})\,(x_2 - x_1).$$

Puesto que $f'(\boldsymbol{c}) = 0$, entonces $f(x_2) - f(x_1) = 0$. ■

§ 15.5 SERIE DE TAYLOR.

Se ha visto, que si se tiene un un polinomio

$P_n(x) = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \cdots + c_n (x-a)^n$ de grado n, entonces

$P_n(x) = P_n(a) + \frac{P_n'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P_n''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, es decir,

$c_k = \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}$ para $k = 0, 1, 2, \ ,n$. lo que se puede verificar directamente.

Supongamos ahora que se tiene un mapeo $f\colon A \to B \subseteq \mathbb{R}$ que tiene en un punto $a \in A \subseteq \mathbb{R}$, derivadas hasta de orden n. Entonces se puede obtener un polinomio

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

cuyas derivadas hasta el orden n en el punto a coinciden con las derivadas de orden correspondiente del mapeo f en el punto a, es decir, $\frac{P_n^{(k)}(a)}{k!} = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ para $k = 0, 1, 2, \ ,n$.

Definición 22. Sea $f\colon A \to B \subseteq \mathbb{R}$ un mapeo que tiene en un punto $a \in A \subseteq \mathbb{R}$, derivadas hasta de orden n. El polinomio algebraico

$$P_n(x; a) := f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

se llama polinomio de Taylor de grado n del mapeo f en el punto a.

La diferencia $r_n(x; a) = f(x) - P_n(x; a)$ se llama residuo (de grado n) del polinomio de Taylor. Se tiene entonces $f(x) = P_n(x; a) + r_n(x; a)$, es decir

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x; a),$$

Nótese que, por las propiedades del polinomio $P_n(x; a)$; se tiene que

$$r_n(a; a) = r_n'(a; a) = r_n''(a; a) = r_n'''(a; a) = \cdots = r_n^{(n)}(a; a) = 0.$$

Definición 23. Si un mapeo $f\colon A \to B \subseteq \mathbb{R}$ tiene en un punto $a \in A \subseteq \mathbb{R}$, derivada de cualquier orden $n \in \mathbb{N}$, entonces la siguiente serie es llamada, Serie de Taylor del mapeo f en el punto a:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

No hay ningún motivo para pensar que, la serie de Taylor de cualquier mapeo infinitamente diferenciable debe convergir en alguna vecindad del punto a puesto que para cada sucesión de números $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ se puede construir (aunque no sea nada fácil) un mapeo $f\colon A \to B \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f^{(n)}(a) = c_n$.

Asimismo, no hay motivo alguno para pensar que si la serie de Taylor converge, entonces debe convergir necesariamente al mapeo $f\colon A \to B \subseteq \mathbb{R}$ del cual fue generada. La convergencia de la serie de Taylor hacia el mapeo $f\colon A \to B \subseteq \mathbb{R}$ del cual fue generada, tiene lugar solamente en los llamados mapeos analíticos.

Teorema 7.5 (Resto de Peano para la Fórmula de Taylor). Sea $r_n\colon A \to B \subseteq \mathbb{R}$ un mapeo n veces diferenciable en un punto $a \in A \subseteq \mathbb{R}$, esto significa además, que r_n es $n - 1$ veces diferenciable en alguna vecindad del punto $a \in A \subseteq \mathbb{R}$.

Supongamos que $r_n(a;\, a) = r'_n(a;\, a) = r''_n(a;\, a) = r'''_n(a;\, a) = \cdots = r^{(n)}_n(a;\, a) = 0$ (lo cual se cumple por las propiedades del polinomio).

Entonces, cuando $x - a = \mathrm{o}(1)$, se tiene

$$r_n(x;\, a) = \mathrm{o}((x - a)^n).$$

Demostración. Por el método de inducción matemática. Para $k = 1$, como el mapeo $r_n\colon A \to B \subseteq \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $a \in A \subseteq \mathbb{R}$ y, puesto que $r_n(a;\, a) = r'_n(a;\, a) = 0$; entonces, cuando $x - a = \mathrm{o}(1)$, se tiene

$$r_n(x;\, a) = r_n(x;\, a) - r_n(a;\, a) = r'_n(a;\, a)\,(x - a) + \mathrm{o}(x - a) = \mathrm{o}(x - a).$$

Supongamos que el teorema es válido para algún $k \in \mathbb{N}$, es decir, que bajo las condiciones del teorema, se cumple la igualdad $r_n(x;\, a) = \mathrm{o}((x - a)^k)$ cuando $x - a = \mathrm{o}(1)$.

Supongamos que $r_n\colon A \to B$ tiene en un punto $a \in A$, derivadas hasta de orden $k + 1$ y que además

$$r_n(a;\, a) = r'_n(a;\, a) = r''_n(a;\, a) = r'''_n(a;\, a) = \cdots = r^{(k+1)}_n(a;\, a) = 0.$$

Entonces, cuando $x \to a$, se tiene, por el teorema de Lagrange, que existe un c entre x y a, tal que

$$r_n(x;\, a) = r_n(x;\, a) - r_n(a;\, a) = r'_n(c;\, a)\,(x - a).$$

Puesto que, $|\,c - a\,| < |\,x - a\,|$, entonces, $c - a = \mathrm{o}(1)$ cuando $x - a = \mathrm{o}(1)$ y, por lo tanto, se tiene $r'_n(c;\, a) = \mathrm{o}((c - a)^k) = \mathrm{o}((x - a)^k)$, de donde se sigue que

$$r_n(x;\, a) = r'_n(c;\, a)\,(x - a) = \mathrm{o}((x - a)^k)\,(x - a) = \mathrm{o}((x - a)^{k+1}). \blacksquare$$

Teorema 8.5 (Fórmula Local de Taylor). Sea $f\colon A \to B \subseteq \mathbb{R}$ un mapeo n veces diferenciable en un punto $a \in A \subseteq \mathbb{R}$. Entonces

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \mathrm{o}((x - a)^n).$$

Demostración. Puesto que el polinomio de Taylor $P_n(x;\, a)$ se construye con la coincidencia de todas las derivadas con las correspondientes derivadas del mapeo f en el punto a, entonces $f^{(k)}(a) - P^{(k)}_n(a;\, a) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$. por lo que la afirmación del teorema se sigue directamente del teorema anterior. ■

La fórmula demostrada es una generalización de la igualdad

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + o(x-a) \text{ cuando } x - a = o(1).$$

la cual es la fórmula de Taylor con el residuo de Peano, cuando $x - a = o(1)$, para $n = 1$.

Teorema 6.5 (Unicidad del Polinomio de Taylor). Si existe el polinomio

$$P_n(x; a) = c_0 + c_1 (x-a) + \cdots + c_n (x-a)^n$$

que satisface la condición $f(x) = P_n(x; a) + o((x-a)^n)$, cuando $x - a = o(1)$, $x \in A$, es decir,

$$f(x) = c_0 + c_1 (x-a) + \cdots + c_n (x-a)^n + o((x-a)^n), \text{ cuando } x - a = o(1),\ x \in A,$$

entonces dicho polinomio es único.

Demostración. De la condición

$$f(x) = c_0 + c_1 (x-a) + \cdots + c_n (x-a)^n + o((x-a)^n), \text{ cuando } x - a = o(1),\ x \in A,$$

por la unicidad del límite se obtienen sucesivamente los coeficientes del polinomio

$$c_0 = \lim_{A \ni x \to a} f(x)$$

$$c_1 = \lim_{A \ni x \to a} \frac{f(x) - c_0}{x - a}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_n = \lim_{A \ni x \to a} \frac{f(x) - [c_0 + \cdots + c_{n-1}(x-a)^{n-1}]}{(x-a)^n}. \ \blacksquare$$

Puesto que, cuando $x - a = o(1)$, se tiene

$$O((x-a)^{n+1}) = \beta(x-a)(x-a)^{n+1} = \beta(x-a)(x-a)(x-a)^n = \alpha(x-a)(x-a)^n = o((x-a)^n),$$

y, puesto que $f^{(n+1)}(x)$ es acotada en una vecindad del punto a, entonces la Fórmula de Taylor con el residuo de Peano, cuando $x - a = o(1)$, se puede escribir también como

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + O((x-a)^{n+1}).$$

Además, por inducción, se puede demostrar que, cuando $x - a = o(1)$, se tiene

$$(x-a)^{n+1} = (x-a) \cdot 1 \cdot (x-a)^n = o(1) \cdot (x-a)^n = o((x-a)^n).$$

El siguiente polinomio, llamado fórmula de Maclaurin, es un caso particular de la fórmula de Taylor, cuando $a = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n), \text{ ó bien,}$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + O(x^{n+1}).$$

Teorema 9.5 (Resto de Schlömilch-Roche para el Polinomio de Taylor). Sea A el segmento con puntos extremos a y x, (es decir, $A = [\, a, x\,]$ ó $A = [\, x, a\,]$), y sea f: $A \to B \subseteq \mathbb{R}$ un mapeo continuo junto con sus primeras n derivadas en A y diferenciable $n + 1$ veces en los puntos interiores de A. Entonces, para cualquier mapeo continuo φ: $A \to B$ en este segmento, que tenga derivada no nula en sus puntos interiores, existe un punto $c \in A$, para el cual

$$r_n(x; a) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{n!\ \varphi'(c)}\, f^{(n+1)}(c)\,(x - c)^n.$$

Demostración. Sustituyendo el valor constante a, por el variable t en el polinomio de Taylor, se tiene

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + r_n(x; a).$$

y tomando el residuo como mapeo de argumento t, resulta

$$r_n(x; t) = f(x) - [\, f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x - t) + \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n\,].$$

Como $r_n(x; t)$ es continua en el segmento A y diferenciable para en sus puntos interiores, al calcular la derivada por t, se obtiene

$$r_n'(x; t) = -[\, f'(t) - \frac{f'(t)}{1!} + \frac{f''(t)}{1!}(x - t) - \frac{f''(t)}{1!}(x - t) + \frac{f'''(t)}{2!}(x - t)^2 - \cdots + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n\,].$$

Es decir, $r_n'(x; t) = -\dfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n$.

Aplicando es teorema de Cauchy a $r_n(x; t)$ y a $\varphi(t)$ en el segmento A, se encuentra un punto c entre x y a, para el cual

$$\frac{r_n(x; x) - r_n(x; a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{r_n'(x; c)}{\varphi'(c)}.$$

Además, para este punto c, se tiene $r_n'(x; c) = -\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n$.

Por lo que, de la igualdad del teorema de Cauchy, obtenemos

$$\frac{r_n(x; x) - r_n(x; a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{0 - r_n(x; a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{r_n'(x; c)}{\varphi'(c)} = \frac{-\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n}{\varphi'(c)}$$

Es decir,

$$r_n(x; a) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{n!\ \varphi'(c)}\, f^{(n+1)}(c)\,(x - c)^n. \ \blacksquare$$

Corolario (Resto de Lagrange para el Polinomio de Taylor). Tomando en el resto de Schlömilch-Roche para la Serie de Taylor como mapeo $\varphi\colon A \to B$, el mapeo $\varphi(t) \coloneqq (x - t)^{n+1}$, resulta

$$r_n(x;\, a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}.$$

Nótese que el mapeo $\varphi(t) \coloneqq (t - x)^{n+1}$ lleva al mismo resultado. ■

Corolario (Resto de Cauchy para el Polinomio de Taylor). Tomando en el resto de Schlömilch-Roche para la Serie de Taylor como mapeo $\varphi\colon A \to B$, el mapeo $\varphi(t) \coloneqq t$, resulta

$$r_n(x;\, a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\,(x-c)^n\,(x-a).$$

Nótese que los mapeos $\varphi(t) \coloneqq -t$, $\varphi(t) \coloneqq x - t$ y $\varphi(t) \coloneqq t - x$ llevan al mismo resultado. ■

Puesto que $|\, c - a \,| < |\, x - a \,|$, entonces existe un número θ, que en general depende de x; tal que $0 < |\,\theta\,| < 1$ y $c = a + \theta(\,x - a\,)$, por lo que el resto de Cauchy se puede escribir de la siguiente manera:

$$r_n(x;\, a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\,(\,1 - \theta\,)^n\,(x-a)^{n+1},$$

en donde $0 < \theta < 1$, si $a < c < x$; y $-1 < \theta < 0$, si $x < c < a$.

Ejemplo. El polinomio de grado n para el mapeo e^x es

$$e^x = \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\,;$$

así como el residuo de Lagrange es $r_n(\,x;\,0\,) = \dfrac{e^c}{(n+1)!}\,x^{n+1}$, en donde $|\,c\,| < |\,x\,|$, por lo que

$$|\,r_n(x;\,0)\,| = \frac{e^c}{(n+1)!}\,|\,x\,|^{n+1} < \frac{|\,x\,|^{n+1}}{(n+1)!}\,e^{|\,x\,|}.$$

En cualquier caso, si con un $x \in \mathbb{R}$, cuando $n \to \infty$, el valor $\dfrac{|\,x\,|^{n+1}}{(n+1)!}\,e^{|\,x\,|}$ tiende a cero, por lo que, de la definición de la suma de una serie, se tiene

$$e^x = exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

Ejemplos.

1) La fórmula de Taylor para el mapeo $\exp_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ en el punto $x = 0$ tiene la forma

$$a^x = \exp_a(x) = 1 + \ln(a)\,x + \ln^2(a)\,\frac{x^2}{2!} + \ln^3(a)\,\frac{x^3}{3!} + \cdots + \ln^n(a)\,\frac{x^n}{n!} + r_n(x;\,0);$$

2) La fórmula de Taylor para el mapeo $\operatorname{senh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en el punto $x = 0$ tiene la forma

$$\operatorname{senh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + r_n(x; 0);$$

3) La fórmula de Taylor para el mapeo cosh: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en el punto $x = 0$ tiene la forma

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + r_n(x; 0);$$

Ejemplos. Desarrollo de Taylor para algunos mapeos, cuando $a = 0$ (Fórmula de Maclaurin):

1) $\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1});$

2) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n});$

3) $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n);$

4) $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha - 1)\frac{x^2}{2!} + \cdots + (\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)) \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$

5) $e^x = \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$

6) $\tan^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1});$

7) $\frac{1}{2}\,\frac{\ln(1 + x)}{\ln(1 - x)} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1});$

Además, cuando $a = 1$, se tienen también las siguientes series:

8) $\ln(x) = (x - 1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} + o((x - 1)^n);$

9) $(x^\alpha - 1) = \alpha(x - 1) + \alpha(\alpha - 1)\frac{(x-1)^2}{2!} + \cdots + (\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)) \frac{(x-1)^n}{n!} + o((x - 1)^n).$

Del mapeo $\tan^{-1}(x)$ se puede obtener una serie para el número π:

$$\pi = \tan^{-1}(1) = 4\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots \right].$$

Definición 24. Si un mapeo f: $A \to B \subseteq \mathbb{R}$ tiene en un punto $a \in A \subseteq \mathbb{R}$, derivada de cualquier orden $n \in \mathbb{N}$, entonces la siguiente serie es llamada, Serie de Taylor del mapeo f en el punto a:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \cdots$$

CAPÍTULO VI
GRAFICACIÓN DE MAPEOS

§ 1.6 CONDICIONES DE MONOTONÍA DE LOS MAPEOS.

Teorema. Sea f: $[\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\ ] \to \mathbb{R}$ un mapeo continuo en el segmento $[\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\ ]$ y diferenciables en el intervalo $]\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\ [$, es decir, $f, g \in \mathscr{C}(\ [\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\ ]\ ) \cap \mathscr{D}(\ ]\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\ [\ )$. Entonces

$f'(\boldsymbol{x}) > 0\ \forall\ \boldsymbol{x} \in\ ]\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\ [\ \Longrightarrow\ f$ es estrictamente creciente en $[\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\ ]$ $\Longrightarrow f'(\boldsymbol{x}) \geq 0$

$f'(\boldsymbol{x}) < 0\ \forall\ \boldsymbol{x} \in\ ]\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\ [\ \Longrightarrow\ f$ es estrictamente decreciente en $[\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\ ]$ $\Longrightarrow f'(\boldsymbol{x}) \leq 0$

$f'(\boldsymbol{x}) \geq 0\ \forall\ \boldsymbol{x} \in\ ]\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\ [\ \Longrightarrow\ f$ es creciente en $[\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\ ]$ $\Longrightarrow f'(\boldsymbol{x}) \geq 0$

$f'(\boldsymbol{x}) \leq 0\ \forall\ \boldsymbol{x} \in\ ]\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\ [\ \Longrightarrow\ f$ es decreciente en $[\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\ ]$ $\Longrightarrow f'(\boldsymbol{x}) \leq 0$

$f'(\boldsymbol{x}) = 0\ \forall\ \boldsymbol{x} \in\ ]\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\ [\ \Longrightarrow\ f$ es constante en $[\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\ ]$ $\Longrightarrow f'(\boldsymbol{x}) = 0$

Demostración. Como $f \in \mathscr{C}(\ [\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\ ]\ ) \cap \mathscr{D}(\ ]\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\ [\ )$, entonces para cualesquiera dos puntos $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in\ ]\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\ [$, tales que $\boldsymbol{x}_1 < \boldsymbol{x}_2$, es decir, $\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 > 0$, por el teorema de Lagrange, para el mapeo f, existe un punto $\boldsymbol{c} \in\ ]\ \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\ [$, para el cual

$$f(\boldsymbol{x}_2) - f(\boldsymbol{x}_1) = f'(\boldsymbol{c})\ (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1).$$

En este caso el signo de $f(\boldsymbol{x}_2) - f(\boldsymbol{x}_1)$ coincide con el signo de $f'(\boldsymbol{c})$; y, si $f'(\boldsymbol{x}) = 0$ $\forall$ $\boldsymbol{x} \in\ ]\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\ [$, entonces, puesto que $f'(\boldsymbol{c}) = 0$, se tiene que $f(\boldsymbol{x}_2) - f(\boldsymbol{x}_1) = 0$, es decir, el mapeo f es constante.

Además, si $\boldsymbol{x}_2 > \boldsymbol{x}_1$, entonces el signo de $f(\boldsymbol{x}_2) - f(\boldsymbol{x}_1)$ coincide con el signo de $f'(\boldsymbol{c})$.

Ahora, como f es diferenciable en cualquier punto $\boldsymbol{x} \in\ ]\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\ [$, entonces

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a})\ (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \mathrm{o}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}),\ \text{cuando } \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = \mathrm{o}(1),\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \text{ y } (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \neq 0.$$

Se tiene entonces, $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = (f'(\boldsymbol{a}) + \mathrm{o}(1))\ (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$, es decir, $\dfrac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}} = (f'(\boldsymbol{a}) + \mathrm{o}(1))$.

Si f es creciente, entonces $\dfrac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}} \geq 0$ (tienen el mismo signo) y, por lo tanto $f'(\boldsymbol{a}) \geq 0$.

Si f es decreciente, entonces $\dfrac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}} \leq 0$ (tienen signo contrario) y, por lo tanto $f'(\boldsymbol{a}) \leq 0$

Si f es constante, entonces $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = 0$ aunque $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \neq 0$ y, por lo tanto $f'(\boldsymbol{a}) = 0$. ■

§ 2.6 Condiciones del Extremo Interior de los Mapeos.

Teorema (Condición necesaria). Sea $f\colon \mathbf{E}(a) \to \mathbb{R}$ un mapeo definido en una vecindad de un punto a. Si a es un punto de extremo interior, entonces

ó f no es diferenciable en el punto a, ó $f'(x) = 0$.

Demostración. Si f es diferenciable en el punto a, entonces, puesto que a es un punto de extremo interior, por el lema de Fermat se tiene que $f'(a) = 0$. ■

Teorema 10.5 (Condición suficiente-Criterio de la primera derivada). Sea $f\colon \mathbf{E}(a) \to \mathbb{R}$ un mapeo definido en una vecindad de un punto a, continua en este punto y diferenciable en una vecindad perforada $\mathring{\mathbf{E}}(a)$. Supongamos que

$$\mathring{\mathbf{E}}_-(a) = \{\, x \in \mathbf{E}(a) \mid x < a \,\} \quad \mathring{\mathbf{E}}_+(a) = \{\, x \in \mathbf{E}(a) \mid x > a \,\}.$$

Entonces se tiene

1) $(f'(x) > 0\ \forall\, x \in \mathring{\mathbf{E}}_-(a))$ y $(f'(x) < 0\ \forall\, x \in \mathring{\mathbf{E}}_+(a)) \implies f$ tiene un máximo en a.

2) $(f'(x) < 0\ \forall\, x \in \mathring{\mathbf{E}}_-(a))$ y $(f'(x) > 0\ \forall\, x \in \mathring{\mathbf{E}}_+(a)) \implies f$ tiene un mínimo en a.

3) $(f'(x) > 0\ \forall\, x \in \mathring{\mathbf{E}}_-(a))$ y $(f'(x) > 0\ \forall\, x \in \mathring{\mathbf{E}}_+(a)) \implies f$ no tiene extremo en a.

4) $(f'(x) < 0\ \forall\, x \in \mathring{\mathbf{E}}_-(a))$ y $(f'(x) < 0\ \forall\, x \in \mathring{\mathbf{E}}_+(a)) \implies f$ no tiene extremo en a.

Demostración. Si f es diferenciable en el punto a, entonces, puesto que a es un punto de extremo interior, por el lema de Fermat se tiene que $f'(a) = 0$. ■

1) Por el teorema anterior se sigue que f es estrictamente creciente en $\mathring{\mathbf{E}}_-(a)$ y, como f es continua en el punto a, entonces $f(x) < f(a)$ cuando $x \in \mathring{\mathbf{E}}_-(a)$. Análogamente, f es estrictamente decreciente en $\mathring{\mathbf{E}}_+(a)$, y por la continuidad de f en el punto a, se tiene que $f(a) < f(x)$ cuando $x \in \mathring{\mathbf{E}}_+(a)$. Por lo tanto f tiene un máximo local en a.

2) La demostración es análoga a la de 1).

3) Por el teorema anterior se sigue que f es estrictamente creciente en $\mathring{\mathbf{E}}_-(a)$ y, como f es continua en el punto a, entonces $f(x) - f(a) = o(1)$ cuando $x - a = o(1)$, $x \in \mathring{\mathbf{E}}_-(a)$. Análogamente, f es estrictamente creciente en $\mathring{\mathbf{E}}_+(a)$, y por la continuidad de f en el punto a, se tiene que $f(x) - f(a) = o(1)$ cuando $x - a = o(1)$. Por lo tanto f es estrictamente creciente en la vecindad $\mathring{\mathbf{E}}_+(a)$ y por lo tanto f no tiene extremo en a.

4) La demostración es análoga a la de 3). ■

Teorema 11.5 (Condición suficiente-Criterio de las Derivadas de Orden Superior). Sea $f\colon \mathbf{E}(a) \to \mathbb{R}$ un mapeo definido en una vecindad de un punto a, y supongamos que es n veces diferenciable en el punto a. Supongamos que $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ y $f^{(n)}(a) \neq 0$.

Entonces, si n es un número impar, f no tiene extremo en el punto a; si n es un número par, f no tiene extremo en el punto a. Además, si $f^{(n)}(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en a; y si $f^{(n)}(a) < 0$, entonces f tiene un máximo local en a.

Demostración. Utilizando el polinomio de Taylor con el residuo de Peano, se tiene

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n), \text{ cuando } x - a = o(1),\ x \in A.$$

Como en el demostración del lema de Fermat, se tiene

$$f(x) - f(a) = \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + o(1)\right)(x-a)^n, \text{ cuando } x - a = o(1),\ x \in A.$$

Como $f^{(n)}(a) \neq 0$, entonces $\forall\ x \in \mathbf{E}_A(c)$, se tiene que $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} + o(1)$ tiene, por el teorema de conservación del signo, el mismo signo que $f^{(n)}(a)$ en alguna una vecindad de a. Si n es impar, entonces $(x-a)^n$ cambia de signo, lo que implica el cambio de signo de la diferencia $f(x) - f(a)$, por lo que f no tendría extremo en el punto a. Si n es par, entonces $(x-a)^n > 0$ cuando $x \neq a$, por lo que existe alguna una vecindad de a en la cual el signo de la diferencia $f(x) - f(a)$ coincide con el signo de $f^{(n)}(a)$. ■

§ 3.6 LAS DESIGUALDADES DE YOUNG, GËLDER Y MINKOWSKY.

Lema 1. Sea $f: A \to \mathbb{R}$ el mapeo definido por la igualdad $f(x) = x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1$.

Entonces $\quad f(x) = x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \leq 0$ cuando $\quad 0 < \alpha < 1$, y

$\quad f(x) = x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \geq 0$ cuando $\quad \alpha < 0$ ó $\alpha > 1$.

Demostración. El mapeo $f(x)$ es diferenciable, por lo que se tiene

$f'(x) = \alpha\,(x^{\alpha-1} - 1)$ y $f'(1) = 0$.

Si $0 < \alpha < 1$, entonces f' cambia de positivo a negativo en el punto $x = 1$ y por lo tanto en el punto $x = 1$ el mapeo f tiene un máximo.

Si $\alpha < 0$ ó $\alpha > 1$, f' cambia de negativo a positivo en el punto $x = 1$ y por lo tanto en el punto $x = 1$ el mapeo f tiene un mínimo.

Pero$f(1) = 1^\alpha - \alpha(1) + \alpha - 1 = 0$, lo que demuestra las desigualdades, las cuales, como se ve, son estrictas para $x \neq 1$. ■

Teorema 12.5 (Desigualdad de Young). Sean a, $b \in \mathbb{R}^+$ y $p, q \in \mathbb{R}-\{0, 1\}$ tales que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Entonces

$$\sqrt[p]{a}\,\sqrt[q]{b} \leq \frac{a}{p}+\frac{b}{q}, \text{ si } p > 1, \text{ y}$$

$$\sqrt[p]{a}\,\sqrt[q]{b} \geq \frac{a}{p}+\frac{b}{q}, \text{ si } p < 1$$

Además, la igualdad se cumple sólo si $a = b$.

Demostración. Se deduce directamente del lema, haciendo $x = \frac{a}{b}$ y $\alpha = \frac{1}{p}$. ■

Teorema 13 (Desigualdad de Gëlder). Sean $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$ $i = 1, 2, \ldots, n$; y $p, q \in \mathbb{R}-\{0, 1\}$ tales que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Entonces

$$\sum_{i=0}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=0}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=0}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, \text{ si } p > 1, \text{ y}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i b_i \geq \left(\sum_{i=0}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=0}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, \text{ si } p > 1 \;\; p \neq 0.$$

Cuando $p < 0$, se supone que $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$; y la igualdad se cumple sólo cuando los vectores $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ son proporcionales.

Demostración. En la primera desigualdad de Young hágase $a = \dfrac{a_i^p}{\sum_{i=0}^{n} a_i^p}$ y $b = \dfrac{b_i^q}{\sum_{i=0}^{n} b_i^q}$,

de donde se obtiene $\dfrac{a_i b_i}{\left(\sum_{i=0}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=0}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \dfrac{1}{p}\dfrac{a_i^p}{\sum_{i=0}^{n} a_i^p} + \dfrac{1}{q},\dfrac{b_i^q}{\sum_{i=0}^{n} b_i^q}$

Sumando estas desigualdades para i de 1 hasta n, se obtiene

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i b_i}{\left(\sum_{i=0}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=0}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq 1 \text{ si } p > 1.$$

La otra desigualdad se demuestra de manera análoga. Las igualdades se obtienen de $a = b$, en las desigualdades de Young. ■

Un caso particular de la desigualdad de Young, es la desigualdad de Cauchy-Schwartz-Buñakowsky. Para $p = 2 > 1$, se tiene

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\, b_i\right)^2 \le \sum_{i=0}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=0}^{n} b_i^2 .$$

La desigualdad de Cauchy-Swartz-Buñakowsky se puede obtener también utilizando directamente la siguiente igualdad:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\, b_i\right)^2 = \sum_{i=0}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=0}^{n} b_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} (a_i\, b_j - b_i\, a_j)^2 .$$

Teorema 14.5 (Desigualdad de Minkowsky). Sean $a_i \ge 0$, $b_i \ge 0$ $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces

$$\left(\sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=0}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=0}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ si } p > 1, \text{ y}$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \ge \left(\sum_{i=0}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=0}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ si } p > 1 \;\; p \ne 0.$$

Demostración. Aplicando la desigualdad de Gëlder, en los miembros derechos de las desigualdades, para la identidad

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)^p \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i\, (a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=0}^{n} b_i\, (a_i + b_i)^{p-1} .$$

Los miembros izquierdos de las desigualdades, serán acotados superior e inferiormente, de acuerdo a las desigualdades de Gëlder, por el valor

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=0}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}} .$$

Las desigualdades obtenidas se dividen entre $\left(\sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}$, y se obtienen los resultados buscados.

Como en la desigualdad de Gëlder, la igualdad se cumple sólo cuando los vectores $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ son proporcionales. ■

§ 4.6 Concavidad y Convexidad de los Mapeos.

Definición 1. Un mapeo f: $]\,a, b\,[\to B \subseteq \mathbb{R}$, se llama cóncavo en el intervalo $]\,a, b\,[$, si para cualesquiera $x_1, x_2, \in\,]\,a, b\,[$ y cualesquiera $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, tales que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, se verifica la desigualdad

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Si además, la desigualdad es estricta cuando $x_1 \neq x_2$ y $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \neq 0$, entonces el mapeo f es estrictamente cóncavo en $]\,a, b\,[$.

Definición 2. Un mapeo f: $]\,a, b\,[\to B \subseteq \mathbb{R}$, se llama convexo en el intervalo $]\,a, b\,[$, si para cualesquiera $x_1, x_2, \in\,]\,a, b\,[$ y cualesquiera $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, tales que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, se verifica la desigualdad

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Si además, la desigualdad es estricta cuando $x_1 \neq x_2$ y $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \neq 0$, entonces el mapeo f es estrictamente convexo en $]\,a, b\,[$.

De las relaciones $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ y $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, se obtienen

$$\alpha_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \text{ y } \alpha_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

por lo que la desigualdad $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$ se puede escribir de la forma

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Considerando $x_1 < x < x_2$, al multiplicar todo por $x_2 - x_1$, se obtiene

$$(x_2 - x_1)\, f(x) \leq (x_2 - x)\, f(x_1) + (x - x_1)\, f(x_2).$$

sustituyendo en esta desigualdad $(x_2 - x_1)$ por $(x_2 - x) + (x - x_1)$, obtenemos

$$(x_2 - x)\, f(x) + (x - x_1)\, f(x) \leq (x_2 - x)\, f(x_1) + (x - x_1)\, f(x_2), \text{ de donde}$$

$$(x_2 - x)\,(f(x) - f(x_1)) \leq (x - x_1)\,(f(x_2) - f(x)), \text{ es decir}$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

lo que nos muestra otra forma de definir la concavidad de un mapeo en un intervalo $]\,a, b\,[$.

En lo sucesivo, nos limitaremos sólo a demostrar los teoremas para los mapeos cóncavos f: $]\,a, b\,[\to B \subseteq \mathbb{R}$, en un intervalo $]\,a, b\,[$, puesto que todas las construcciones se hacen en forma análoga para los mapeos convexos en el mismo intervalo (cambiando f por $-f$), como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 15.5. Sea f: $]\,a, b\,[\to B \subseteq \mathbb{R}$, un mapeo. Entonces, f es cóncavo (estrictamente cóncavo) en $]\,a, b\,[$ si, y sólo si, el mapeo $-f$ es convexo (estrictamente convexo) en $]\,a, b\,[$.

Demostración. Sea deduce directamente de la equivalencia

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \iff -f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 (-f(x_1)) + \alpha_2 (-f(x_2)). \blacksquare$$

Teorema 16.5. Sea f:] $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ [$\to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$, un mapeo dos veces diferenciable en el intervalo] $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ [. Entonces, f es cóncavo (estrictamente cóncavo) en] $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ [si, y sólo si, su derivada f' es creciente (estrictamente creciente) en] $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ [.

Demostración. Sea f un mapeo cóncavo (estrictamente cóncavo) en] $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ [, es decir, que para cualesquiera dos puntos x_1, x_2, $\in$] $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ [y cualesquiera dos números no negativos $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, tales que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, se verifica la desigualdad

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Al calcular sucesivamente los límites cuando $x \to x_1$ y $x \to x_2$, se obtiene

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \lim_{x \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ y .}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \lim_{x \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(x_2)\text{; es decir}$$

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$$

lo que nos muestra que la derivada f' del mapeo f es monótona en el intervalo] $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ [.

Por el teorema de Lagrange, existen dos elementos c_1 y c_2 tales que $x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2$ y, para los cuales, se tiene

$$f'(x_1) \leq f'(c_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2) \leq f'(x_2)$$

lo que significa que si el mapeo f es estrictamente cóncavo en en el intervalo] $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ [, entonces que la derivada f' del mapeo f' es esrictamente monótona en el mismo intervalo.

Recíprocamente, para $a < x_1 < x < x_2 < b$, por el teorema de Lagrange, existen dos elementos c_1 y c_2 tales que $x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2$ y, para los cuales, se tiene

$$f'(c_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ y } \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2),$$

Si $f'(c_1) \leq f'(c_2)$, entonces $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$; y si $f'(c_1) < f'(c_2)$, entonces $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$, que es lo que se quería demostrar. ■

Análogamente, f es convexo (estrictamente convexo) en] $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ [si, y sólo si, su derivada f' es decreciente (estrictamente decreciente) en] $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ [.

Corolario. Sea f:] $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ [$\to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$, un mapeo dos veces diferenciable en el intervalo] $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ [. Entonces, f es cóncavo (estrictamente cóncavo) en] $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ [si, y sólo si, $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) > 0$) en] $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ [. ■

Análogamente, f es convexo (estrictamente convexo) en $]\,a, b\,[$ si, y sólo si, $f''(x) \leq 0$ ($f''(x) < 0$) en $]\,a, b\,[$.

Teorema 17.5. Sea f: $]\,a, b\,[\to B \subseteq \mathbb{R}$, un mapeo diferenciable en el intervalo $]\,a, b\,[$. Entonces, f es cóncavo (estrictamente cóncavo) en $]\,a, b\,[$ si, y sólo si, la gráfica del mapeo en cualquier punto $x_0 \in\,]\,a, b\,[$, queda por no por debajo (por encima) de la tangente de f en el punto $(x_0, f(x_0))$.

Demostración. Para un punto interior del intervalo $x_0 \in\,]\,a, b\,[$, la ecuación de la gráfica en el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene la forma

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0),$$

Aplicando el teorema de Lagrange, existe un punto c entre x y x_0 para el cual

$f(x) - f(x_0) = f'(c)\,(x - x_0)$, por lo que

$$f(x) - y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\,(x - x_0) = f'(c)\,(x - x_0) - f'(x_0)\,(x - x_0) = (f'(c) - f'(x_0))\,(x - x_0).$$

Como f es un mapeo cóncavo (estrictamente cóncavo) en $]\,a, b\,[$, entonces la derivada $f'(x)$ no decrece (crece) en este intervalo y por lo tanto el signo de la diferencia $f'(c) - f'(x_0)$ coincide con el signo de la diferencia $x - x_0$, por lo cual $f(x) - y \geq 0$ ($f(x) - y > 0$) en cualquier punto $x \in\,]\,a, b\,[$.

Recíprocamente, si para cualesquiera dos puntos $x, x_0 \in\,]\,a, b\,[$, se tiene

$$f(x) - y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\,(x - x_0) \geq 0, \text{ entonces}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_0) \quad \text{para } x < x_0 \text{, y}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq f'(x_0) \qquad \text{para } x > x_0.$$

Resulta entonces que, para cualesquiera tres puntos $x_1, x, x_2 \in\,]\,a, b\,[$, se tiene

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

en donde, la desigualdad es estricta, si $f(x) - y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\,(x - x_0) > 0$. ■

Análogamente, f es convexo (estrictamente convexo) en $]\,a, b\,[$ si, y sólo si, la gráfica del mapeo en cualquier punto $x_0 \in\,]\,a, b\,[$, queda por no por encima (por debajo) de la tangente de f en el punto x_0.

Definición 3. Sea f: $\mathbf{E}(a) \to \mathbb{R}$ un mapeo definido y diferenciable en una vecindad $\mathbf{E}(a)$ de un punto $a \in \mathbb{R}$. Si en el conjunto $\mathring{\mathbf{E}}_-(a) = \{\, x \in \mathbf{E}(a) \mid x < a \,\}$ el mapeo f es cóncavo (convexo) y en el conjunto $\mathring{\mathbf{E}}_+(a) = \{\, x \in \mathbf{E}(a) \mid x > a \,\}$, es convexo (cóncavo), entonces se dice que el punto $(a, f(a))$ es un punto de inflexión de la gráfica del mapeo y diremos que el mapeo f tiene un punto de inflexión en a.

Por lo tanto, al pasar por el punto de inflexión, cambia la gráfica de cóncava a convexa ó de convexa a cóncava, por lo que en el punto $(x_0, f(x_0))$ de la gráfica del mapeo f pasa de un lado de la tangente en dicho punto, al otro.

Si la segunda derivada $f''(x)$ definida en la vecindad $\mathbf{E}(a)$ del punto $a \in \mathbb{R}$ y tiene en $\mathring{\mathbf{E}}_-(a)$ un signo y en $\mathring{\mathbf{E}}_+(a)$ el signo contrario, entonces esto es suficiente para que la primera derivada $f'(x)$ sea monótona en $\mathring{\mathbf{E}}_-(a)$ y en $\mathring{\mathbf{E}}_+(a)$ (creciente en un conjunto y decreciente en el otro), por lo cual, por el teorema n (penúltimo), la concavidad del mapeo f cambia en el punto $(a, f(a))$, es decir, el mapeo f tiene un punto de inflexión en a.

Teorema 18.5 (Desigualdad de Yensen). Sea $f\colon]\, a, b\, [\to B \subseteq \mathbb{R}$, un mapeo cóncavo, y sean los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in]\, a, b\, [$ y los números no negativos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, tales que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$. entonces se verifica la desigualdad

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n).$$

Demostración. Para $n = 2$ coincide con la definición de concavidad.

Supóngase que la desigualdad se cumple para $n - 1$. Entonces, dados $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$, tales que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$, se tiene que $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} \geq 0$ implica

$$\frac{\alpha_1}{\beta} + \cdots + \frac{\alpha_{n-1}}{\beta} = 1.$$

Como el mapeo f es cóncavo, se tiene

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) = f\left(\beta \left(\frac{\alpha_1}{\beta} x_1 + \cdots + \frac{\alpha_{n-1}}{\beta} x_{n-1}\right) + \alpha_n x_n\right) \leq$$

$$\leq \beta \left(\frac{\alpha_1}{\beta} f(x_1) + \cdots + \frac{\alpha_{n-1}}{\beta} f(x_{n-1})\right) + \alpha_n f(x_n),$$ en donde $\beta + \alpha_n = 1$, y

$$\left(\frac{\alpha_1}{\beta} x_1 + \cdots + \frac{\alpha_{n-1}}{\beta} x_{n-1}\right) \in]\, a, b\, [.$$ Por la hi pótesis de inducción, se tiene

$$f\left(\frac{\alpha_1}{\beta} x_1 + \cdots + \frac{\alpha_{n-1}}{\beta} x_{n-1}\right) \leq \frac{\alpha_1}{\beta} f(x_1) + \cdots + \frac{\alpha_{n-1}}{\beta} f(x_{n-1}),$$ y por lo tanto

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) \leq \beta \left(\frac{\alpha_1}{\beta} f(x_1) + \cdots \frac{\alpha_{n-1}}{\beta} f(x_{n-1})\right) + \alpha_n f(x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n). \blacksquare$$

§ 5.6 Asíntotas.

Definición 4. Sea f: $A \to \mathbb{R}$ un mapeo definido en una conjunto no acotado $A \subseteq \mathbb{R}$ de números reales. Entonces la línea $y = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ se llama asíntota de la gáfica del mapeo f, si

a) $f(x) - y = f(x) - (c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n) \underset{\mathscr{B}}{=} o(1)$ en la base $\mathscr{B}$ de vecindades laterales de ∞. En este caso la asítnota $y = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ se llama oblicua, cuando $c_1 \neq 0$ y $c_2 = \cdots = c_n = 0$; y se llama horizontal, cuando $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

b) $\lim_{\mathscr{B}} |f(x)| = +\infty$, en donde $\mathscr{B}$ es la base de vecindades laterales del punto $a = c_0 \in \mathbb{R}$, y $c_1 = \cdots = c_n = 0$. En este caso la asítnota $y = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ se llama vertical.

De la definición, para el caso a), se sigue que

$$c_n = \lim_{\mathscr{B}} \frac{f(x)}{x^n},$$

$$c_{n-1} = \lim_{\mathscr{B}} \frac{f(x) - c_n x^n}{x^{n-1}},$$

....

$$c_1 = \lim_{\mathscr{B}} \frac{f(x) - (c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1})}{x},$$

$$c_0 = \lim_{\mathscr{B}} f(x) - (c_1 x + \cdots + c_n x^n).$$

Estas relaciones pueden ser utilizadas para describir el comportamiento asintótico de la gráfica del mapeo f con la ayuda de la gráfica de su polinomio algebraico correspondiente $c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$.

§ 6.6 NÚMEROS COMPLEJOS.

La ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución en el campo de los números reales $\mathbb{R}$. Para librar este problema, primero introducimos en el conjunto producto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ una relación binaria $= \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ y } b = d.$$

Como cada una de las clases de equivalencia consta de un sólo elemento, se denotarán estas clases por (a, b) en lugar de $=_{(a,\ b)}$ y al conjunto producto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ lo denotaremos por $\mathbb{C}$, y lo llamaremos conjunto de los números complejos.

La suma o adición $+\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y el producto o multiplicación $\cdot\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$ se definen respectivamente de la manera siguiente:

$$+\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$((a, b), (c, d)) \to (a + c, b + d) =: (a, b) + (c, d) \text{ y}$$

$$\cdot\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$((a, b), (c, d)) \to (a\,c - b\,d\ ,\ a\,d + b\,c) =: (a, b)\,(c, d).$$

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es un subconjunto del conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos, puesto que, si $b = d = 0$, entonces se ve claramente que el mapeo $f\colon \mathbb{R} \rightleftarrows \mathrm{Re}\mathbb{C}$ definido por la igualdad $f(a) = (a, 0)$ es un isomorfismo entre el conjunto $\mathbb{R}$ y un subconjunto $\mathrm{Re}\mathbb{C} =: \{\, z = (a, b) \in \mathbb{C} \mid a \in \mathbb{R} \text{ y } b = 0, \}$ de $\mathbb{C}$.

Un elemento $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ en el que $b \neq 0$ es llamado número imaginario y si $a = 0$, entonces $(a, b) \in \mathbb{C}$ es llamado número imaginario puro.

Para cada complejo $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ se define un número $\bar{z} = \overline{(a, b)} := (a, -b) \in \mathbb{C}$ llamado conjugado de $z = (a, b)$.

***Propiedades de Campo de los Números Complejos*.**

1) Propiedades de Cerradura. Las dos operaciones binarias están bien definidas.

2) Las operaciones + y · son asociativas

3) Las operaciones + y · son conmutativas

4) $0 = (0,0) \in \mathbb{C}$ es el elemento neutro para la adición

y $1 = (1,0) \in \mathbb{C}$ es el elemento neutro para el producto

5) El inverso aditivo de $(a, b) \in \mathbb{C}$ es $-(a, b) := (-a, -b) \in \mathbb{C}$

y el inverso multiplicativo de $(a, b) \in \mathbb{C}$ es $(a, b)^{-1} := \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2} ; \dfrac{-b}{a^2 + b^2}\right) \in \mathbb{C}$.

6) La operación producto $\cdot: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es distributiva con respecto a la operación suma $+: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Las demostraciones de estas propiedades son de rutina y se dejan para el lector.

Axiomas de Orden

No es posible generalizar a $\mathbb{C}$ las propiedades de orden de los números reales.

Nótese que $z + \bar{z} = (a, b) + \overline{(a, b)} = (a, b) + (a, -b) = (2a, 0)$
y que $z\,\bar{z} = (a, b)\,\overline{(a, b)} = (a, b)(a, -b) = (a, b)(a, -b) = (a^2 + b^2, 0)$.

Para todo $(a, b) \in \mathbb{C}$, se tiene $(a, 0)(0, 1) = (0, 1)(a, 0) = (0, a)$.

Además $(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$, lo que muestra que el número complejo $(0, 1)$ es una solución de la ecuación $(0, 1)^2 + (1, 0) = (0, 0)$, es decir, de la ecuación $z^2 + 1 = 0$.

Se define $(0, 1)$ como la unidad imaginaria y se le denota por $(0, 1) =: i$, por lo que se tiene

$$\forall\, z = (a, b) \in \mathbb{C} \quad (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi.$$

en donde $a =: \mathrm{Re}(a, b)$ se llama parte real y $b =: \mathrm{Im}(a, b)$ se llama parte imaginaria del número complejo (a, b).

Se tiene entonces $(a + bi)^{-1} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2}\, i$.

Los números complejos tienen una representación trigonométrica

El número $z = a + bi \rightleftarrows (a, b)$ representa un punto del plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, que en coordenadas polares toma la forma $a = r\cos(\theta)$ y $b = r\,\mathrm{sen}(\theta)$, en donde $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ es llamado módulo y que representa la distancia del punto (a, b) al origen de coordenadas $(0, 0)$ y $\cos(\theta) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\mathrm{sen}(\theta) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, de donde se obtiene

$$z = a + bi = r(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)) \quad \text{y} \quad \bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi = r(\cos(\theta) - i\,\mathrm{sen}(\theta))$$

La distancia entre dos puntos $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$ es

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$

El producto de $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1))$ y $z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_2))$ es

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1))(\cos(\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_2)) =$$

$$= r_1 r_2(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \mathrm{sen}(\theta_1)\,\mathrm{sen}(\theta_2) + i(\mathrm{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_2)\,\mathrm{sen}(\theta_2))) =$$

$= r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2))$ y el cociente

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos(\theta_1) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1))}{r_2(\cos(\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_2))} = \frac{r_1(\cos(\theta_1) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1))(\cos(\theta_2) - i\,\mathrm{sen}(\theta_2))}{r_2(\cos(\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_2))(\cos(\theta_2) - i\,\mathrm{sen}(\theta_2))} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\,(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \mathrm{sen}(\theta_1)\,\mathrm{sen}(\theta_2) + i\,(\mathrm{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2) - \cos(\theta_2)\,\mathrm{sen}(\theta_2))) =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 - \theta_2)).$$

Si n es un número natural, se tiene $z^n = (r\,(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)))^n = r^n(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta))$.

Además, si $z = w^n = R^n(\cos(\varphi) + i\,\mathrm{sen}(\varphi))$, donde n es un número natural, por la afirmación anterior, se tiene $w^n = R^n(\cos(n\varphi) + i\,\mathrm{sen}(n\varphi)) = r\,(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)) = z$. Entonces, se tiene

$R^n = r$ y $n\varphi = \theta + 2\pi k$ donde k es un número entero, es decir $R = \sqrt[n]{r}$ y $\varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$.

Por lo tanto, $w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)$, donde $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ son la n raíces de z.

§ 7.6 Convergencia en $\mathbb{C}$ y Series con Números Complejos.

La distancia entre dos puntos permite definir los entornos o, mejor dicho, los r-entornos de un número $z_0 \in \mathbb{C}$, como el conjunto $\mathbf{E}_r(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z_1 - z_2| < r \}$ que representa un círculo de radio r (sin incluir a su circunferencia) y con centro en el punto z_0 que, en analogía a los números reales, llamaremos bola de radio r y con centro en el punto $z_0 = (x_0, y_0)$.

En forma análoga a las sucesiones de números reales, se tienen las siguientes definiciones:

Definición 5. El número $z_0 \in \mathbb{C}$ se llama límite de la sucesión de números complejos $\{ z_n \}$, lo que se escribe $\lim\limits_{(\mathbb{N}, \leq)} f(n) \coloneqq z_0$; si para cada entorno $\mathbf{E}_r(z_0)$ de z_0, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $z_n \in \mathbf{E}(z_0)$ cuando $n > n_0$.

Es decir, $\lim\limits_{(\mathbb{N}, \leq)} f(n) \coloneqq z_0$ (lo que es más usual escribir como $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \coloneqq z_0$) si para cualquier vecindad $\mathbf{E}(z_0)$ de z_0, el conjunto $\{ n \in \mathbb{N} \mid z_n \notin \mathbf{E}(z_0)\}$ no es un subconjunto confinal de $(\mathbb{N}, \leq)$, lo cual implica que todos los z_n posteriores a z_{n_0}, es decir, una cantidad infinita, quedan contenidos en $\mathbf{E}(z_0)$; y todos los z_n anteriores a z_{n_0}, es decir, sólo una cantidad finita, quedan fuera de $\mathbf{E}(z_0)$.

Definición 6. Si existe el límite $\lim\limits_{(\mathbb{N}, \leq)} z_n = z_0$, se dice entonces que la sucesión $\{ z_n \}$ converge a z_0. Si la sucesión $\{ z_n \}$ tiene límite, se llama convergente; y si no tiene límite, se llama divergente.

Se tiene entonces que la sucesión $\{ z_n \}$ converge a z_0, si $\lim\limits_{(\mathbb{N}, \leq)} |z_n - z_0| = 0$, esto es, si $|z_n - z_0| = o(1)$; y de las desigualdades

$$max\ \{|x_n - x_0|, |y_n - y_0|\} \leq |z_n - z_0| \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0|$$

se ve que la sucesión de números complejos $\{ z_n \}$ converge si, y sólo si las dos sucesiones de números reales $\{ x_n \}$ y $\{ y_n \}$ convergen al mismo tiempo.

Teorema 19.5 (Criterio de Cauchy). Una sucesión de números complejos $\{ z_n \}$ es convergente si, y sólo si es fundamental.

Demostración. Se deduce directamente del criterio de Cauchy para series de números reales. ■

Si la suma S de la serie $\sum_{i=1}^{\infty} z_i \coloneqq z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$, la entendemos (como en el caso de los números reales) como el límite de la sucesión $\{ S_n \}$ de las sumas parciales de la sucesión $\{ z_n \}$ cuando $n \to \infty$,es decir, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, entonces se obtiene el Criterio de Cauchy para la convergencia de la serie $S \coloneqq \sum_{i=1}^{\infty} z_i = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$.

Teorema 20.5 (Criterio de Cauchy de la convergencia de la serie). La serie $z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$ converge si, y sólo si $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N} \mid$ para $n \geq k > N$, se tiene $|z_k + \cdots + z_n| < \varepsilon$.

Demostración. Se deduce directamente del criterio de Cauchy para series de números reales. ■

Corolario 2. Si la serie $S = z_1 + \cdots + z_n + \cdots$ converge, entonces la sucesión $\{ z_n \}$ de sus términos tiene límite 0 cuando $n \to +\infty$, es decir,

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} z_i \text{ converge } \Longrightarrow \lim_{(\mathbb{N},\leq)} z_n = 0.$$

Demostración. Es suficiente, en el criterio de Cauchy, hacer $m = n$, ó bien, de la siguiente manera: Como $z_n = S_n - S_{n\text{-}1}$, entonces $\lim_{(\mathbb{N},\leq)} z_n = \lim_{(\mathbb{N},\leq)} (S_n - S_{n\text{-}1}) = \lim_{(\mathbb{N},\leq)} S_n - \lim_{(\mathbb{N},\leq)} S_{n\text{-}1} = S - S = 0$. ■

Como en el caso de números reales, la serie $S = \sum_{i=1}^{\infty} z_i$ se llama absolutamente convergente, si converge la serie $\sum_{i=1}^{\infty} z_i \coloneqq |\, z_1 \,| + |\, z_2 \,| + \cdots + |\, z_n \,| + \cdots$.

Del criterio de Cauchy y de la desigualdad $|z_k + \cdots + z_n| \leq |\, z_1 \,| + \cdots + |\, z_n \,|$, se sigue que si la serie $S = \sum_{i=1}^{\infty} z_i$ converge absolutamente, entonces es convergente.

Ejemplo 1.

1) La serie $e^x = \exp(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots$; es absolutamente convergente en toda la recta real y por la ley de los exponentes, se tiene $\exp(x)\exp(y) = e^x e^{iy}$, de donde

$$e^x e^{iy} = 1 + (x + yi) + \left(\frac{x^2}{2!} + xyi + \frac{(yi)^2}{2!} \right) + \cdots + \left(\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} yi + \cdots + x \frac{(yi)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(yi)^n}{n!} \right) + \cdots =$$

$$= 1 + (x + yi) + \frac{(x + yi)^2}{2!} + \frac{(x + yi)^3}{3!} + \cdots + \frac{(x + yi)^n}{n!} + \cdots = e^{x+iy} = \exp(x + yi) = \exp(z) = e^z.$$

2) (*Fórmula de Euler*) Las series trigonométricas

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

y, $$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots;$$

son absolutamente convergentes en toda la recta real.

De la serie $e^x = \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$; se obtiene

$$e^{iy} = \exp(iy) = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \cdots + \frac{(i\,y)^n}{n!} + \cdots = 1 - \frac{y^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$
$$+ i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right) + \cdots = \cos(y) + i\operatorname{sen}(y),$$ es decir

Por lo tanto $$e^z = e^{x+iy} = e^x\, e^{iy} = e^x\,(\cos(y) + i\operatorname{sen}(y)).$$

Análogamente $$e^{\bar{z}} = e^{x-iy} = e^x\, e^{-iy} = e^x\,(\cos(y) - i\operatorname{sen}(y)).$$

Esta es la famosa fórmula de Euler, que relaciona a los mapeos elementales.

Por ejemplo, de las definiciones $\operatorname{senh}(x) \coloneqq \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $\cosh(x) \coloneqq \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, se tiene

$$\operatorname{senh}(ix) \coloneqq \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = \frac{\cos(x) + i\operatorname{sen}(x) - (\cos(x) - i\operatorname{sen}(x))}{2} = \frac{2\,i\operatorname{sen}(x)}{2} = i\operatorname{sen}(x);$$

$$\text{y } \cosh(ix) \coloneqq \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{\cos(x) + i\operatorname{sen}(x) + \cos(x) - i\operatorname{sen}(x)}{2} = \frac{2\cos(x)}{2} = \cos(x);$$ es decir,

$$\operatorname{senh}(ix) = i\operatorname{sen}(x) \text{ y } \cosh(ix) = \cos(x).$$

Además, $$\operatorname{sen}(ix) = ix - \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = i\left(x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right) = i\operatorname{senh}(x)$$
y $$\cos(ix) = 1 - \frac{(ix)^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \cdots = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \cosh(x),$$ es decir,

$$\operatorname{sen}(ix) = i\operatorname{senh}(x) \text{ y } \cos(ix) = \cosh(x).$$

$$\operatorname{sen}(x)\ \cos(yi) = x1 - \left(\frac{x^3}{3!}1 + x\frac{(yi)^2}{2!}\right) + \left(\frac{x^5}{5!}1 + \frac{x^3}{3!}\frac{(yi)^2}{2!} + x\frac{(yi)^4}{4!}\right) - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^n\left(\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}1 + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\frac{(yi)^2}{2!} + \cdots + \frac{x^3}{3!}\frac{(yi)^{2n-2}}{(2n-2)!} + x\frac{(yi)^{2n}}{(2n)!}\right) + \cdots$$

y, $$\cos(x)\operatorname{sen}(yi) = 1\,(yi) - \left(\frac{x^2}{2!}(yi) + 1\frac{(yi)^3}{3!}\right) + \left(\frac{x^4}{4!}(yi) + \frac{x^2}{2!}\frac{(yi)^3}{3!} + 1\frac{(yi)^5}{5!}\right) - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^n\left(\frac{x^{2n}}{(2n)!}y + \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}\frac{(yi)^3}{3!} + \cdots + \frac{x^2}{2!}\frac{(yi)^{2n-1}}{(2n-1)!} + 1\frac{(yi)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) + \cdots$$

Al efectuar la suma y la resta de estas dos últimas series, se obtiene

$$\operatorname{sen}(x)\cos(yi) \pm \cos(x)\operatorname{sen}(yi) =$$

$$= (x \pm yi) - \frac{(x \pm yi)^3}{3!} + \frac{(x \pm yi)^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{(x \pm yi)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \operatorname{sen}(x \pm yi).$$

$$\text{Es decir, } \operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen}(x + yi) \text{ y } \operatorname{sen}(\overline{z}) = \operatorname{sen}(x - yi).$$

En forma análoga, se obtiene

$$\cos(x)\cos(yi) = 1 \cdot 1 - \left(\frac{x^2}{2!}1 + 1\frac{(yi)^2}{2!}\right) + \left(\frac{x^4}{4!}1 + \frac{x^2}{2!}\frac{(yi)^2}{2!} + 1\frac{(yi)^4}{4!}\right) - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^n \left(\frac{x^{2n}}{(2n)!}1 + \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}\frac{(yi)^2}{2!} + \cdots + \frac{x^2}{2!}\frac{(yi)^{2n-2}}{(2n-2)!} + 1\frac{(yi)^{2n}}{(2n)!}\right) + \cdots$$

y, $$\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(yi) = x \cdot yi - \left(\frac{x^3}{3!}yi + x\frac{(yi)^3}{3!}\right) + \left(\frac{x^5}{5!}yi + \frac{x^3}{3!}\frac{(yi)^3}{3!} + x\frac{(yi)^5}{5!}\right) - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^n \left(\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}y + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\frac{(yi)^3}{3!} + \cdots + \frac{x^3}{3!}\frac{(yi)^{2n-1}}{(2n-1)!} + x\frac{(yi)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) + \cdots$$

Al efectuar la resta y la suma de estas dos últimas series, se obtiene

$$\cos(x)\cos(yi) \pm \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(yi) =$$

$$= 1 - \frac{(x \pm yi)^2}{2!} + \frac{(x \pm yi)^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{(x \pm yi)^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \cos(x \pm yi)$$

$$\text{Es decir, } \cos(z) = \cos(x + yi) \text{ y } \cos(\overline{z}) = \cos(x - yi).$$

3) La serie geométrica $S = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n + \cdots$ converge absolutamente cuando $|z| < 1$, y su suma es $S = \dfrac{1}{1-z}$. Cuando $|z| \geq 1$, esta seire no converge ya que el término general de la serie no tiende a cero.

Las series de la forma $S(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$ se llaman series de potencias.

Teorema 21.5. (*Fórmula de Cauchy-Adamar*). La serie de potencias de números complejos $S(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$ converge en el círculo $|z - z_0| < R$ con centro en el punto z_0 y radio R, el cual se define por la fórmula de Cauchy-Adamar:

$$R := \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{c_n}}.$$

En cualquier punto interior del círculo la serie converge absolutamente y en cualquier punto exterior del círculo, la serie diverge.

Demostración. Se deduce inmediatamente si aplicamos el criterio de Cauchy para la serie $|c_0| + |c_1(z - z_0)| + |c_2(z - z_0)^2| + |c_3(z - z_0)^3| + \cdots + |c_n(z - z_0)^n| + \cdots$, se tiene que esta converge si

$$|(z - z_0)| < \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{c_n}}. \blacksquare$$

Corolario. (*Primer Teorema de Abel*). Si la serie de potencias de números complejos $S(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$ converge en algún punto z_1, entonces converge absolutamente en cualquier z que satisface la desigualdad $|(z - z_0)| < |(z_1 - z_0)|$.

Demostración. Se deduce inmediatamente de la fórmula de Cauchy-Adamar. ■

Teorema 22.5. Si la serie de potencias de números complejos $S(z) = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$ converge absolutamente, entonces la serie $S'(z) = z_{n_1} + z_{n_2} + z_{n_3} + \cdots + z_{n_k} + \cdots$ obtenida de $S(z)$ mediante la permutación de los términos de $S(z)$, converge absolutamente y su suma coincide con la suma de $S(z)$.

Demostración. Como la serie $S(z) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} z_i$ es convergente absolutamente, entonces para un $\varepsilon > 0$ se encuentra un número $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} |z_n| < \varepsilon$. Encontremos un número $K \in \mathbb{N}$ tal que entre los términos de la suma $S_k'(z) = z_{n_1} + z_{n_2} + z_{n_3} + \cdots + z_{n_k}$ cuando $k > K$ se encuentren todos los términos de la suma $S_N(z) = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n$. Si $S(z) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} z_i$, entonces, cuando $k > K$, se tiene $|S(z) - S_k'(z)| \le |S_N(z) - S_k'(z)| \le \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} |z_n| + \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} |z_n| < 2\varepsilon$. Por lo tanto, cuando $k \to \infty$ se tiene $S_k'(z) \to S(z)$ y si se aplica lo demostrado a las series $|z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_n| + \cdots$ y $|z_{n_1}| + |z_{n_2}| + |z_{n_3}| + \cdots + |z_{n_k}| + \cdots$, entonces se deduce que la última serie es convergente. ■

Al efectuar la suma y resta respectiva de estas dos últimas series, se obtiene

1) $\operatorname{sen}(z) \equiv \operatorname{sen}(x + iy) \equiv \operatorname{sen}(x)\cos(iy) + \cos(x)\operatorname{sen}(iy)$.

y 2) $\operatorname{sen}(\bar{z}) \equiv \operatorname{sen}(x - iy) \equiv \operatorname{sen}(x)\cos(y) - \cos(x)\operatorname{sen}(y)$.

análogamente se obtiene 3) $\cos(x + y) \equiv \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$.

y 4) $\cos(x - y) \equiv \cos(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$.

10) $\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$;

11) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$;

12) $\ln(1+\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{x}^2}{2} + \frac{\boldsymbol{x}^3}{3} - \frac{\boldsymbol{x}^4}{4} + \cdots + (-1)^{\boldsymbol{n}+1}\frac{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}} + o(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}})$;

13) $(1+\boldsymbol{x})^{\alpha} = 1 + \alpha\boldsymbol{x} + \alpha(\alpha-1)\frac{\boldsymbol{x}^2}{2!} + \cdots + (\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\boldsymbol{n}+1))\frac{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}!} + o(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}})$;

14) $\tan^{-1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{x}^3}{3} + \frac{\boldsymbol{x}^5}{5} - \frac{\boldsymbol{x}^7}{7} + \cdots + (-1)^{\boldsymbol{n}}\frac{\boldsymbol{x}^{2\boldsymbol{n}+1}}{2\boldsymbol{n}+1} + o(\boldsymbol{x}^{2\boldsymbol{n}+1})$;

15) $\frac{1}{2}\frac{\ln(1+\boldsymbol{x})}{\ln(1-\boldsymbol{x})} = \boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{x}^3}{3} + \frac{\boldsymbol{x}^5}{5} + \frac{\boldsymbol{x}^7}{7} + \cdots + \frac{\boldsymbol{x}^{2\boldsymbol{n}+1}}{2\boldsymbol{n}+1} + o(\boldsymbol{x}^{2\boldsymbol{n}+1})$;

Además, cuando $\boldsymbol{a} = 1$, se tienen también las siguientes series:

16) $\ln(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}-1) - \frac{(\boldsymbol{x}-1)^2}{2} + \frac{(\boldsymbol{x}-1)^3}{3} - \frac{(\boldsymbol{x}-1)^4}{4} + \cdots + (-1)^{\boldsymbol{n}+1}\frac{(\boldsymbol{x}-1)^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}} + o((\boldsymbol{x}-1)^{\boldsymbol{n}})$;

17) $(\boldsymbol{x}^{\alpha}-1) = \alpha(\boldsymbol{x}-1) + \alpha(\alpha-1)\frac{(\boldsymbol{x}-1)^2}{2!} + \cdots + (\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\boldsymbol{n}+1))\frac{(\boldsymbol{x}-1)^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}!} + o((\boldsymbol{x}-1)^{\boldsymbol{n}})$.

§ 3. MAPEOS DE VARIAS VARIABLES.

Definición 10. Se define la n-upla ordenada $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de n elementos $a_1, a_2, \dots, a_n$ como el conjunto

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) := \{ \{ a_1 \}, \{ a_1, a_2 \}, \dots, \{ a_1, a_2, \dots, a_n \} \}$$

De la definición de n-upla ordenada se sigue directamente que

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \Longleftrightarrow a_i = b_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

Definición 11. Se define el producto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ de n conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ como el conjunto

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, \ i = 1, 2, \dots, n \}$$

Si $A := A_1 = A_2 = := \cdots = A_n$, se escribe A^n en lugar de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.

Como $\mathbb{R}^n$ denotaremos el conjunto de todas las n-uplas ordenadas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, de números reales, es decir

$$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, \dots, n \}.$$

Cada n-upla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ la vamos a denotar por una letra $x := (x_1, x_2, \dots, x_n)$, misma que llamaremos punto del conjunto $\mathbb{R}^n$.

La adición $+: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ queda definida por la igualdad

$$+ ((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

El producto $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de los elementos de $\mathbb{R}^n$ por los elementos de $\mathbb{R}$ queda definido por la igualdad

$$\cdot (a, (x_1, x_2, \dots, x_n)) := (a\, x_1, a\, x_2, \dots, a\, x_n)$$

Definición 13. Un mapeo $\rho: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se llama métrica en $\mathbb{R}^n$, si cumple las siguientes propiedades:

1) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \ \ x = y \Longleftrightarrow \rho(x, y) = 0.$
2) $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n \ \ \rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(y, z).$

De las propiedades 1) y 2) se sigue que

$\rho(x, y) \le \rho(x, x) + \rho(y, x) = \rho(y, x) \le \rho(y, y) + \rho(x, y) = \rho(x, y)$, es decir
$\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

Además $\rho(x, y) + \rho(x, y) \ge \rho(x, x) = 0$.

Ejemplo. El mapeo $\rho: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definido por la igualdad

$$\rho(x, y) := \sqrt{\sum_{i=0}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

define una métrica en $\mathbb{R}^n$, llamada distancia entre los puntos $x \in \mathbb{R}^n$ y $y \in \mathbb{R}^n$.

Vecindad de un punto. Para $r \in \mathbb{R}^+$ se define el conjunto

$$\mathbf{E}_r(a) := \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, y) < r \,\}$$

llamado entorno ó vecindad de $a \in \mathbb{R}$ con radio $r \in \mathbb{R}^+$.

En general, cualquier intervalo abierto que contiene a un punto $a \in \mathbb{R}$, se llama entorno ó vecindad de a y se denota como $\mathbf{E}(a)$. También se utilizarán las notaciones $\mathbf{U}(a)$ y $\mathbf{V}(a)$.

Denotaremos como $\mathscr{A}(a)$ a la familia de vecindades de un punto $a \in \mathbb{R}$.

Vecindad de infinito. Para $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$ se define el conjunto

$$\mathbf{E}_{r_1,r_2}(\infty) := \{\, x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{r_1} \text{ ó } \frac{1}{r_2} < x \,\}$$

llamado entorno ó vecindad de infinito con radio inferior $r_1 \in \mathbb{R}^+$ y radio superior $r_2 \in \mathbb{R}^+$.

Denotaremos como $\mathscr{A}(\infty)$ a la familia de vecindades de infinito.

Vecindad perforada de un punto. Cualquier vecindad $\mathbf{E}(a)$ de un punto $a \in \mathbb{R}$, de la que se excluye dicho punto a se llama vecindad perforada de a, y se denota como $\mathring{\mathbf{E}}(a)$. Es decir,

$$\mathring{\mathbf{E}}_{r_1,r_2}(a) := \mathbf{E}_{r_1,r_2}(a) - \{\, a \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} - \{\, a \,\} \mid -r_1 < x - a < r_2 \,\}$$

Definición 13. Un mapeo F: $A \times B \to C$ cuyo dominio de definición es el producto $A \times B$ se llama mapeo de dos variables.

Definición 13. Un mapeo F: $A \times B \to C$ cuyo dominio de definición es el producto $A \times B$ se llama mapeo de dos variables.

$$\mathrm{F}'_x(a) := \lim_{A \ni x \to a} \frac{\mathrm{F}(x; b) - \mathrm{F}(a; b)}{x - a}$$

$$\mathrm{F}'_y(b) := \lim_{A \ni y \to b} \frac{\mathrm{F}(a; y) - \mathrm{F}(a; b)}{y - b}$$

Si $f \subseteq A \times B$, es un mapeo, entonces se escribe $b = f(a)$ en lugar de $(a, b) \in f$, y se dice que $b \in B$ es la imagen de $a \in A$ bajo el mapeo f.

Dos mapeos f_1: $A_1 \to B_1$ y f_2: $A_2 \to B_2$ son iguales, si $A_1 = A_2$ y $f_1(x) = f_2(x)\ \forall\ a \in A_1$. Esto implica que $f(A_1) \subseteq B_1 \cap B_2$.

Definición . Sea a un punto de acumulación de $A \subseteq \mathbb{R}$. El mapeo f: $A \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto a, si existe un mapeo $\mathrm{L} \cdot (x - a)$ lineal con relación a $(x - a)$, llamado diferencial del mapeo f: $A \to \mathbb{R}$ en el punto a; que cumple la igualdad

$$f(x) - f(a) = \mathrm{L} \cdot (x - a) + o(x - a) \text{ cuando } x - a = o(1).$$

El diferencial de un mapeo en un punto está definido unívocamente, puesto que

$$f(x) - f(a) = \mathrm{L} \cdot (x - a) + o(x - a) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \mathrm{L} + o(1),$$

$$\text{de donde } \lim_{A \ni x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{A \ni x \to a} (\mathrm{L} + o(1)) = \mathrm{L}.$$

y, por el teorema de unicidad del límite, se tiene que el número L queda definido unívocamente.

Definición . El número

$$f'(a) \coloneqq \lim_{A \ni x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

se llama derivada (ó mapeo derivado) de f con respecto de x en el punto a.

Se puede escribir de forma equivalente

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + o(1) \text{ cuando } A \ni x - a = o(1).$$

o sea,

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + o(x - a) \text{ cuando } x \to a, x \in A.$$

Sea $A^* \coloneqq \{ x \in A \mid f\colon A \to \mathbb{R} \text{ es diferenciable en } x \}$

El mapeo $f'\colon A^* \to \mathbb{R}$ definido por la relación $f'\colon a \to f'(a) = \lim\limits_{A \ni x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, $\forall\ a \in A^*$ donde el mapeo $f\colon A \to \mathbb{R}$ es diferenciable, se llama derivada (ó mapeo derivado) de f.

Al denotar la diferencia $h \coloneqq x - a$, llamada incremento de x; se obtiene

$$f(x + h) - f(x) = f'(x)\, h + o(h) \text{ cuando } h = o(1), \text{ es decir, cuando } h \to 0$$

y el mapeo $f'\colon A' \to \mathbb{R}$ queda entonces definido por la igualdad $f'(x) \coloneqq \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

La diferencial $\mathrm{L} \cdot (x - a)$ del mapeo f se denota por $df(a)$, es decir $df(a) = f'(a)(x - a)$.

En muchos de los casos, cuando a un mapeo $f\colon [\, a, b\,] \to \mathbb{R}$, definido en un segmento $[\, a, b\,] \subset \mathbb{R}$, se le quiere estudiar su comportamiento en los puntos extremos a y b; es necesario restringir el concepto de diferenciación definiendo la diferenciación lateral.

Definición . El mapeo $f\colon [\, a, b\,] \to \mathbb{R}$ es diferenciable en a por la derecha, si

$$f(x) - f(a) = f'(a^+)(x - a) + o(x - a) \text{ cuando } x \to a, x \in [\, a, b\,],$$

en donde el límite

$$f'(a^+) \coloneqq \lim_{[a;\, b] \ni x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

existe y es llamado derivada de f por la derecha del punto a.

Definición . El mapeo $f\colon [\, a, b\,] \to \mathbb{R}$ es diferenciable en b por la izquierda, si

$$f(x) - f(b) = f'(b^-)(x - b) + o(x - b) \text{ cuando } x \to b, x \in [\,a, b\,],$$

en donde el límite

$$f'(b^-) \coloneqq \lim_{[a;\, b]\ni x\to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

existe y es llamado derivada de f por la izquierda del punto b.

Definición . El mapeo $f\colon A \to \mathbb{R}$ es diferenciable en un conjunto $S \subseteq A$, si es diferenciable en cada punto a del conjunto S.

El mapeo $f\colon A \to \mathbb{R}$ es diferenciable en un segmento $[\,a, b\,] \subseteq A$ si es diferenciable en cada punto del intervalo $]\,a, b\,[\; \subseteq [\,a, b\,]$ y además f es diferenciable en a por la derecha y f es diferenciable en b por la izquierda.

La familia de todos los mapeos $f\colon A \to B \subseteq \mathbb{R}$ que son diferenciables en el conjunto $S \subseteq A$ se denota como $\mathscr{D}(\,A; B\,)$, es decir

$$\mathscr{D}(\,A; B\,) \coloneqq \{f\colon A \to B \subseteq \mathbb{R} \mid f \text{ es un mapeo diferenciable en } A\,\}$$

Se puede escribir $\mathscr{D}(A)$ en lugar de $\mathscr{D}(\,A; \mathbb{R}\,)$.

La notación juega un papel muy importante en la matemática. J.L. Lagrange denotó el límite $\lim\limits_{A\ni x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ por $f'(a)$; W.G. Leibnitz denotó el límite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ por $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$; y L. Arbogast sugirió que la derivada de un mapeo f fuera denotada como Df. El símbolo D llamado operador de derivación, ha tenido gran aceptación y sugiere que Df es un nuevo mapeo obtenido por el operador D. La diferencia $f(x) - f(a)$ W.G. Leibnitz la denotó como $\Delta f \coloneqq f(x) - f(a)$ y la llamó incremento del mapeo; y a la diferencia $h \coloneqq x - a$ la denotó como $\Delta x \coloneqq x - a$ y la llamó incremento del argumento x, o simplemente incremento de x. En este caso, se tiene

$$\Delta f \coloneqq f(x + h) - f(x) = f(x) - f(a) \quad \text{y} \quad \Delta x \coloneqq h = x - a.$$

§ 15. DERIVADA DEL MAPEO IMPLÍCITO. (VARIANTE SIMPLE)

Proposición. Si el mapeo $F:\boldsymbol{U}(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$, definido en un entorno $\boldsymbol{U}(x_0,y_0)$ del punto $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, y tal que

1° $F \in \mathscr{C}^{(p)}(\boldsymbol{U}; \mathbb{R})$, en donde $p \geq 1$,
2° $F(x_0,y_0) = 0$,
3° $F'_y(x_0,y_0) \neq 0$.

Entonces existe un segmento bidimensional $\mathrm{I} \coloneqq \mathrm{I}_x \times \mathrm{I}_y$, en donde

$\mathrm{I}_x \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \alpha \,\}$, $\mathrm{I}_y \coloneqq \{\, y \in \mathbb{R} \mid |y - y_0| < \beta \,\}$, que es un entotno contenido en $\boldsymbol{U}(x_0,y_0)$, y un mapeo $f \in \mathscr{C}^{(p)}(\mathrm{I}_x; \mathrm{I}_y)$, tales que para cualquier punto $(x,y) \in \mathrm{I}_x \times \mathrm{I}_y$

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$$

Además, el derivado del mapeo f en el punto $x \in \mathrm{I}_x$, se puede obtener mediante la igualdad

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

Demostración. Supongamos que $F'_y(x_0,y_0) > 0$. Como $F \in \mathscr{C}^{(1)}(\boldsymbol{U}; \mathbb{R})$, entonces, por el teorema de conservación del signo, existe un entorno del punto (x_0,y_0) en donde $F'_y(x,y) > 0$. Sin perder generalidad podemos considerar que $F'_y(x,y) > 0$ en todo el entorno $\boldsymbol{U}(x_0,y_0)$. Más aún, se puede (si es necesario reducirlo) considerar que $\boldsymbol{U}(x_0,y_0)$ es una bola de radio $r = 2\beta > 0$ con centro en el punto (x_0,y_0) .

Como $F'_y(x,y) > 0$ en $\boldsymbol{U}(x_0,y_0)$, entonces el mapeo $F(x_0,y) > 0$ de y está definido y es monótono creciente en el segmento $y_0 - \beta \leq y \leq y_0 + \beta$, por lo tanto,

$$F(x_0, y_0 - \beta) < F(x_0, y_0) < F(x_0, y_0 + \beta)$$

Demostremos que el cuadrilátero $\mathrm{I} \coloneqq \mathrm{I}_x \times \mathrm{I}_y$, en donde

$$\mathrm{I}_x \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \alpha \,\},\quad \mathrm{I}_y \coloneqq \{\, y \in \mathbb{R} \mid |y - y_0| < \beta \,\},$$

es el rectángulo buscado, en el que se cumple $F(x,y) = 0, \Leftrightarrow y = f(x)$.

Para cada $x \in \mathrm{I}_x$ fijemos el segmento vertical con extremos $(x, y_0 - \beta)$ y $(x, y_0 + \beta)$. Veamos en él $F(x,y)$ como un mapeo de y, y obtenemos un mapeo continuo estrictamente creciente, que tiene signos diferentes en los extremos del segmento. Por lo tanto, para $x \in \mathrm{I}_x$ se encuentra un único punto $y(x) \in \mathrm{I}_y$ que $F(x, y(x)) = 0$. Haciendo $y(x) \eqqcolon f(x)$, obtenemos la relación $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$.

Demostremos ahora que $f \in \mathscr{C}^{(p)}(\mathrm{I}_x; \mathrm{I}_y)$.

Mostremos primero que f es continuo en el punto x_0 y que $f(x_0) = y_0$.

La última igualdad se deduce evidentemente de que cuando $x = x_0$ se tiene un único punto $y(x_0) \in \mathrm{I}_y$ tal que $F(x_0, y(x_0)) = 0$ y, puesto que $F(x_0, y_0) = 0$, por lo que $f(x_0) = y_0$.

Fijando un ε tal que $0 < \varepsilon < \beta$, podemos repetir la demostración de la existencia del mapeo $f(x)$ y encontrar un δ tal que $0 < \delta < \alpha$, para el cual, en el segmento bidimensional $\tilde{\mathrm{I}} \coloneqq \tilde{\mathrm{I}}_x \times \tilde{\mathrm{I}}_y$, en donde

$$\tilde{\mathrm{I}}_x \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta \,\}, \quad \tilde{\mathrm{I}}_y \coloneqq \{\, y \in \mathbb{R} \mid |y - y_0| < \varepsilon \,\},$$

Se cumple la relación

$$(\, F(x,y) = 0 \text{ en } \tilde{\mathrm{I}}) \Leftrightarrow (\, y = f(x) \text{ para } x \in \tilde{\mathrm{I}}_x),$$

con un nuevo mapeo $\tilde{f} : \tilde{\mathrm{I}}_x \to \tilde{\mathrm{I}}_y$.

Pero $\tilde{\mathrm{I}}_x \subseteq \mathrm{I}_x$, $\tilde{\mathrm{I}}_y \subseteq \mathrm{I}_y$ y $\tilde{\mathrm{I}} \subseteq \mathrm{I}$, por lo que se sigue que $\tilde{f}(x) \equiv f(x)$ para $x \in \tilde{\mathrm{I}}_x \subseteq \mathrm{I}_x$, con lo que se verifica que $|\, f(x) - f(x_0)\,| = |\, f(x) - y_0\,| < \varepsilon$ cuando $|\, x - x_0\,| < \delta$.

Hemos establecido la continuidad de f en el punto x_0. Pero cualquier punto $(x,y) \in \mathrm{I}$ en el cual $F(x, y) = 0$ puede ser aceptado como punto inicial de construcción de la demostración, puesto que en él se cumplen las condiciones 2° y 3°. Realizando esta construcción en los límites del segmento I, llegamos a la continuidad de f en el punto x. Queda establecido que $f \in \mathscr{C}(\mathrm{I}_x; \mathrm{I}_y)$.

Demostremos que $f \in \mathscr{C}^{(1)}(\mathrm{I}_x; \mathrm{I}_y)$ y establezcamos que $f\,'(x) = -\dfrac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$.

Sea Δx tal que $x + \Delta x \in \mathrm{I}_x$. Sea $y = f(x)$ y $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Por el teorema del valor medio para $F(x, y)$ en I, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= F(x + \Delta x, f(x + \Delta x)) - F(\, x, f(x)) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(\, x, f(x)) = \\ &= F'_x(x + \theta\, \Delta x, y + \theta\, \Delta y)\, \Delta x \;+\; F'_y(x + \theta\, \Delta x, y + \theta\, \Delta y)\, \Delta y \quad (\, 0 < \theta < 1\,), \end{aligned}$$

y, puesto que $F'_y(x_0,y_0) \neq 0$, se obtiene

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x + \theta\, \Delta x, y + \theta\, \Delta y)}{F'_y(x + \theta\, \Delta x, y + \theta\, \Delta y)}$$

Como $f \in \mathscr{C}(\mathrm{I}_x; \mathrm{I}_y)$, $\Delta x \to 0$ implica $\Delta y \to 0$ y considerando que $F \in \mathscr{C}^{(1)}(\boldsymbol{U}; \mathbb{R})$, cuando $\Delta x \to 0$, obtenemos

$$f\,'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)},$$

en donde $y = f(x)$ y, por la continuidad del mapeo compuesto, se obtiene $f \in \mathscr{C}^{(1)}(\mathrm{I}_x; \mathrm{I}_y)$.

Si para $F \in \mathscr{C}^{(2)}(\boldsymbol{U}; \mathbb{R})$, la última igualdad permite la diferenciación por x y se tiene,

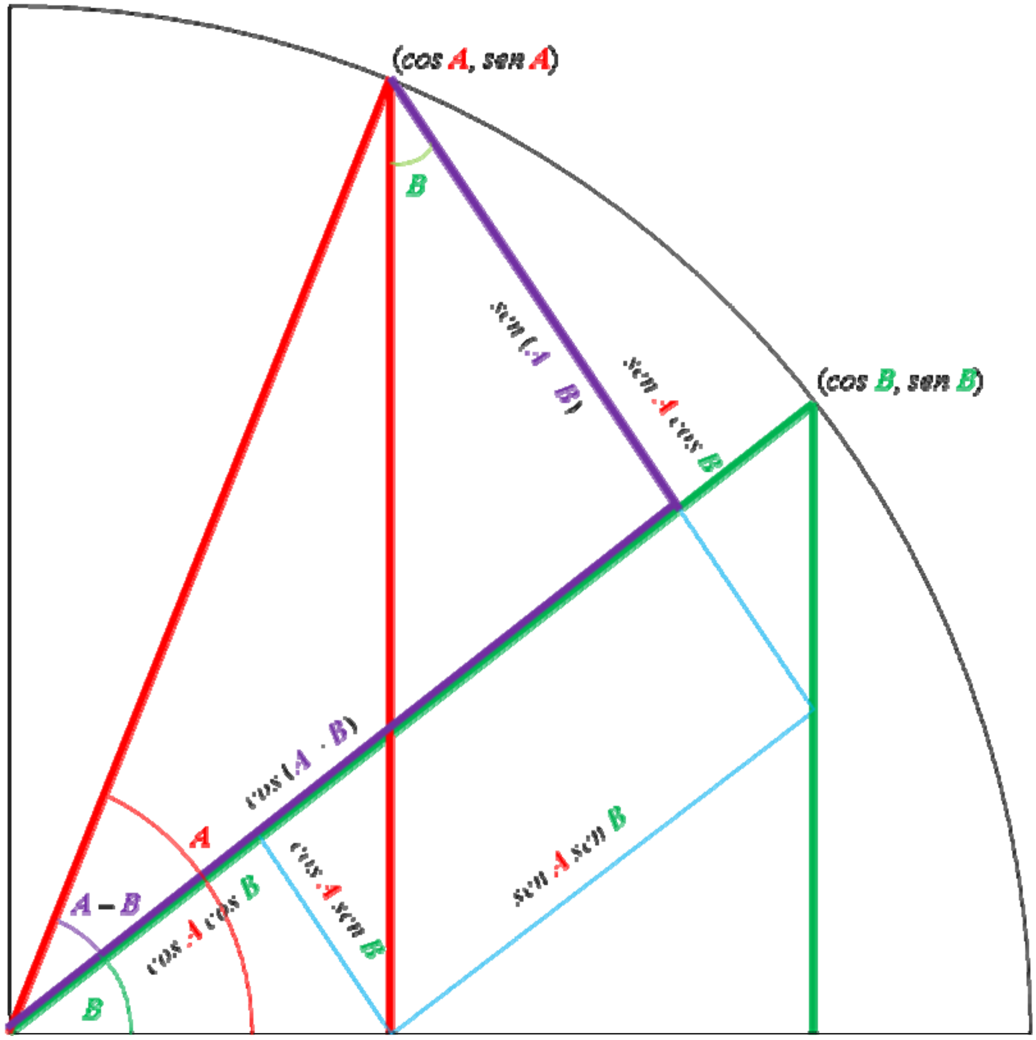
$$f\,''(x) = -\frac{[F''_{xx} + F''_{xy}\, f\,'(x)]\, F'_y - F'_x[\, F''_{xy} + F''_{yy}\, f\,'(x)]}{F''^{2}_{y}}$$

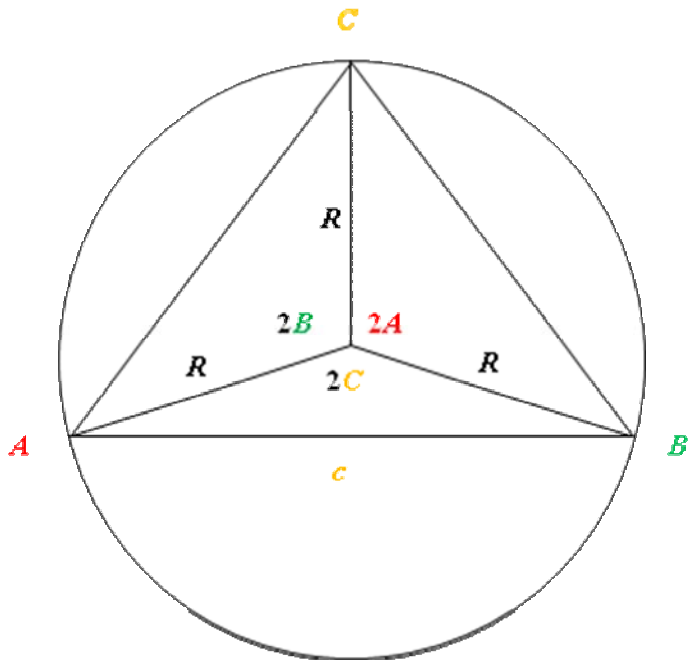
en donde F'_x, F'_v, F''_{xx}, F''_{xy}, F''_{yy}, son se calculan en el $(\, x, f(x))$.

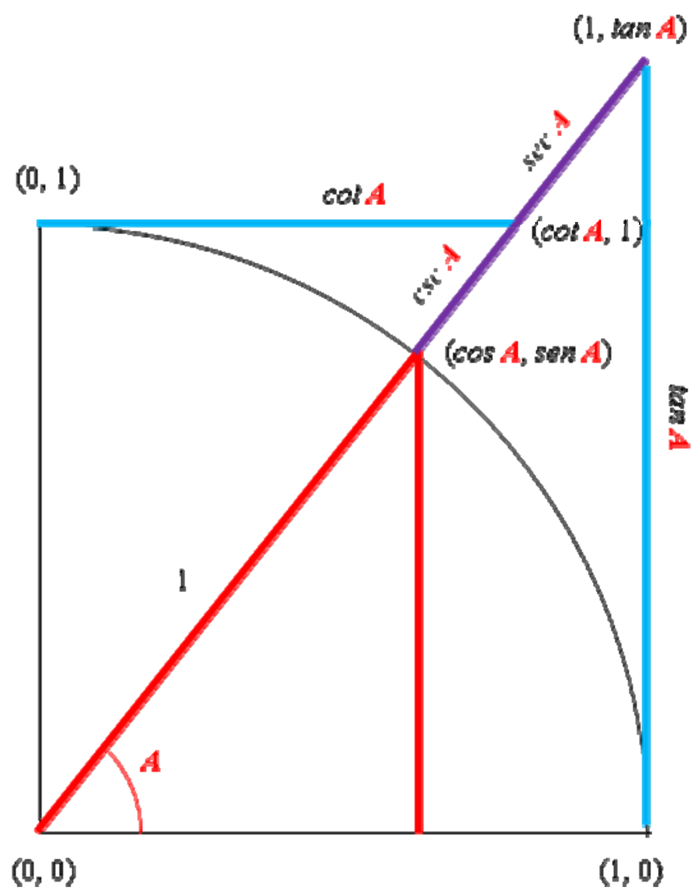
Se tiene entonces $f \in \mathscr{C}^{(2)}(\mathrm{I}_x; \mathrm{I}_y)$, si $F \in \mathscr{C}^{(2)}(\boldsymbol{U}; \mathbb{R})$. Por inducción, puesto que en estas dos igualdades el orden de diferenciación de f en el lado derecho, es una unidad menor que el del lado izquierdo, se tiene que $f \in \mathscr{C}^{(p)}(\mathrm{I}_x; \mathrm{I}_y)$, si $F \in \mathscr{C}^{(p)}(\boldsymbol{U}; \mathbb{R})$. ■

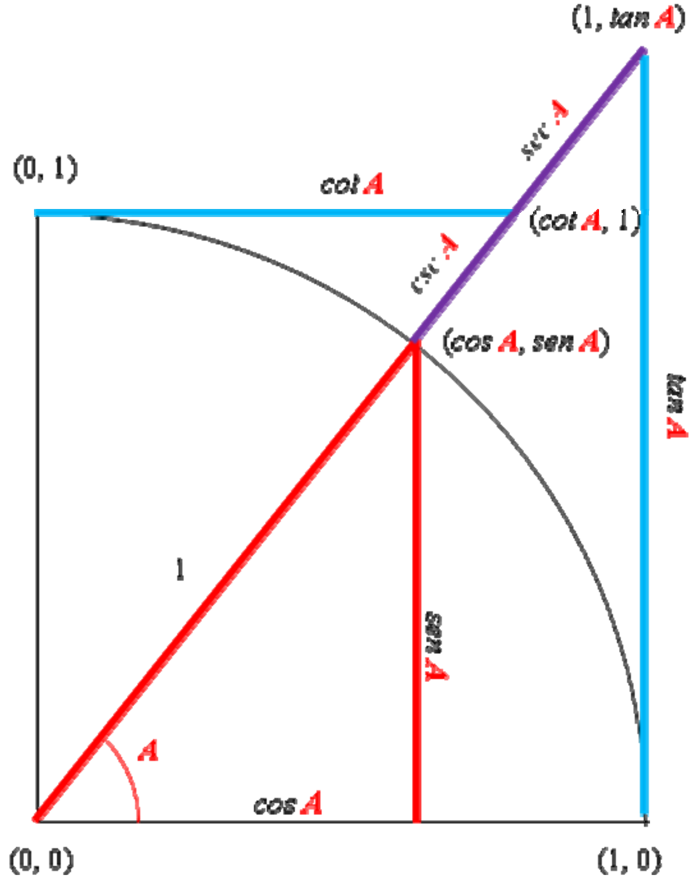
§ 13. DERIVADO DEL MAPEO INVERSO.

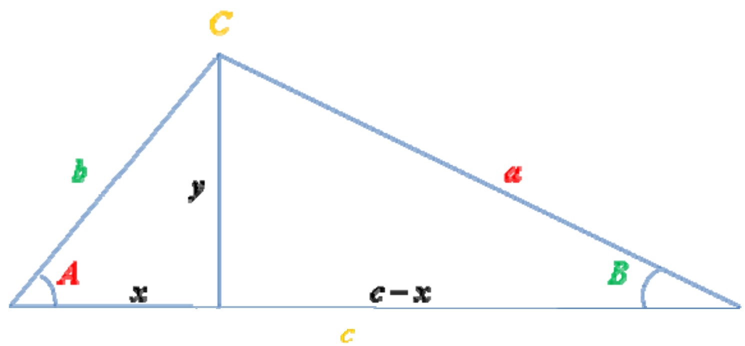
	seno	coseno
3°	$\frac{\sqrt{2}}{16}[(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)-\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}(\sqrt{3}-1)]$	$\frac{\sqrt{2}}{16}[\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}-1)]$
6°	$\frac{1}{8}[\sqrt{3}\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}-(\sqrt{5}+1)]$	$\frac{1}{8}[\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)+\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}]$
9°	$\frac{\sqrt{2}}{8}[(\sqrt{5}+1)-\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}]$	$\frac{\sqrt{2}}{8}[(\sqrt{5}+1)+\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}]$
12°	$\frac{1}{8}[\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)]$	$\frac{1}{8}[\sqrt{3}\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}+(\sqrt{5}-1)]$
15°	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$
18°	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}}$
21°	$\frac{\sqrt{2}}{16}[\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{5}+1)(\sqrt{3}-1)]$	$\frac{\sqrt{2}}{16}[(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)+\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}}]$
24°	$\frac{1}{8}[\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)-\sqrt{;2}\sqrt{5-\sqrt{5}}]$	$\frac{1}{8}[\sqrt{3}\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}+(\sqrt{5}+1)]$
27°	$\frac{\sqrt{2}}{8}[\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}-(\sqrt{5}-1)]=\frac{1}{4}\sqrt{8-2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{2}}{8}[(\sqrt{5}-1)+\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}]=\frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
33°	$\frac{\sqrt{2}}{16}[(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)+\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}(\sqrt{3}-1)]$	$\frac{\sqrt{2}}{16}[(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}(\sqrt{3}+1)]$
36°	$\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$
39°	$\frac{\sqrt{2}}{16}[(\sqrt{5}+1)(\sqrt{3}+1)-\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}(\sqrt{3}-1)]$	$\frac{\sqrt{2}}{16}[\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{5}+1)(\sqrt{3}-1)]$
42°	$\frac{1}{8}[\sqrt{3}\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}-(\sqrt{5}-1)]$	$\frac{1}{8}[\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)]$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$


(cos A, sen A)
B
sen (A − B)
sen A cos B
(cos B, sen B)
cos (A − B)
A
A − B
cos A cos B
cos A sen B
sen A sen B
B


C
R
2B
2A
R
2C
R
A
B
c


(1, tan A)
sec A
(0, 1)
cot A
(cot A, 1)
csc A
(cos A, sen A)
tan A
1
A
(0, 0)
(1, 0)


(1, tan A)
sec A
(0, 1)
cot A
(cot A, 1)
csc A
(cos A, sen A)
tan A
1
sen A
A
cos A
(0, 0)
(1, 0)


C
b
y
a
A
x
c − x
B
c